T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

# ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK PARAMETRELİ ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK ESNEK MATRİSLER VE ONLARIN PERFORMANS TEMELLİ DEĞER ATAMA PROBLEMİNE UYGULAMASI

Tuğçe AYDIN

Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

**T.C.**
**ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ**
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**
**DOKTORA TEZİ**

# ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK PARAMETRELİ ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK ESNEK MATRİSLER VE ONLARIN PERFORMANS TEMELLİ DEĞER ATAMA PROBLEMİNE UYGULAMASI

**Tuğçe AYDIN**
**Matematik Anabilim Dalı**
Tezin Sunulduğu Tarih: **01/12/2020**

**Tez Danışmanı:**

**Dr. Öğr. Üyesi Serdar ENGİNOĞLU**

**ÇANAKKALE**

Tuğçe AYDIN tarafından Dr. Öğr. Üyesi Serdar ENGİNOĞLU yönetiminde hazırlanan ve **01/12/2020** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan **"Aralık Değerli Sezgisel Bulanık Parametreli Aralık Değerli Sezgisel Bulanık Esnek Matrisler ve Onların Performans Temelli Değer Atama Problemine Uygulaması"** başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

**JÜRİ**

Doç. Dr. Çetin CAMCI ...........................
**Başkan**

Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN ...........................
**Üye**

Doç. Dr. Faruk KARAASLAN ...........................
**Üye**

Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR ...........................
**Üye**

Dr. Öğr. Üyesi Serdar ENGİNOĞLU ...........................
**Üye**

Doç. Dr. Pelin KANTEN
Müdür V.
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Sıra No:.......

**İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI**

**Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.**

Tuğçe AYDIN

# TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Serdar ENGİNOĞLU'na, doktora öğrenimim boyunca emeği geçen tüm hocalarıma, tez çalışmasının düzeltmelerinde emeği geçen Samet MEMİŞ ve Burak ARSLAN'a ve hayatımın her evresinde bana destek olan annem Nimet AYDIN, babam Kazım AYDIN ve kardeşim Barış AYDIN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tuğçe AYDIN

Çanakkale, Aralık 2020

## SİMGELER VE KISALTMALAR

| | |
|---|---|
| $Int([0,1])$ | $[0,1]$ kapalı aralığının tüm kapalı klasik alt aralıklarının kümesi |
| $\lambda, \varepsilon, \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ | $Int([0,1])$ kümesinin elemanları |
| $\mathbb{R}^+$ | Pozitif reel sayılar kümesi |
| $\tilde{\leq}$ | $Int([0,1])$ kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı |
| $\leq_{XY}$ | $Int([0,1])$ kümesi üzerinde bir tam sıralama bağıntısı |
| ${}^{\lambda}_{\varepsilon}E$ | Her $x \in E$ için, $\alpha(x) = \lambda$ ve $\beta(x) = \varepsilon$ olan $E$ üzerinde bir *ivif*-küme |
| $0_E$ | $E$ kümesi üzerinde boş *ivif*-küme |
| $1_E$ | $E$ kümesi üzerinde evrensel *ivif*-küme |
| $\tilde{0}$ | Boş *d*-küme |
| $\tilde{1}$ | Evrensel *d*-küme |
| $\begin{bmatrix}\lambda\\ \varepsilon\end{bmatrix}$ | $(\lambda, \varepsilon)$-*d*-matris |
| $\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ | Boş *d*-matris |
| $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ | Evrensel *d*-matris |
| $F(E)$ | $E$ kümesi üzerindeki tüm *f*-kümelerin kümesi |
| $IF(E)$ | $E$ kümesi üzerindeki tüm *if*-kümelerin kümesi |
| $IVIF(E)$ | $E$ kümesi üzerindeki tüm *ivif*-kümelerin kümesi |
| $D_E(U)$ | $U$ kümesi üzerinde $E$ kümesi yoluyla parametrize edilmiş tüm *d*-kümelerin kümesi |
| $D_E[U]$ | $U$ kümesi üzerinde $E$ kümesi yoluyla parametrize edilmiş tüm *d*-matrislerin kümesi |
| $\lvert\kappa\rvert_a$ | $\kappa$'nın ortalama kardinalitesi |
| $f, f_1, f_2, f_3$ | $D_E(U)$ kümesinin elemanları |
| $f_{Af_1}$ | $f$'nin $Af_1$-kısıtlanışı |
| $f_{mr}$ | $f$'nin ortalama indirgemesi |
| $f_{mb}$ | $f$'nin ortalama çift indirgemesi |
| $f_{mbr}$ | $f$'nin ortalama çift indirgeme-indirgemesi |
| $f_{mrb}$ | $f$'nin ortalama indirgeme-çift indirgemesi |
| $\mathscr{A}$ | $U$ kümesi üzerinde bir birleştirme/toplama operatörü |
| $f^*$ | $f$'nin birleştirilmiş/toplanan *ivif*-kümesi |
| *f*-küme | Bulanık küme |
| *if*-küme | Sezgisel bulanık küme |
| *ivif*-küme | Aralık değerli sezgisel bulanık küme |

| | |
|---|---|
| *fpfs*-küme | Bulanık parametreli bulanık esnek küme |
| *fpifs*-küme | Bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek küme |
| *ivfpifs*-küme | Aralık değerli bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek küme |
| *ifpifs*-küme | Sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek küme |
| *d*-küme | Aralık değerli sezgisel bulanık parametreli aralık değerli sezgisel bulanık esnek küme |
| *d*-matris | Aralık değerli sezgisel bulanık parametreli aralık değerli sezgisel bulanık esnek matris |
| BPDF | Piksel yoğunluğuna bağlı filtre (Based on Pixel Density Filter) |
| MDBUTMF | Modifiye karar tabanlı asimetrik kırpılmış medyan filtre (Modified Decision-Based Unsymmetric Trimmed Median Filter) |
| DBA | Karar tabanlı algoritma (Decision-Based Algorithm) |
| NAFSMF | Gürültü uyarlamalı bulanık değiştirmeli medyan filtre (Noise Adaptive Fuzzy Switching Median Filter) |
| DAMF | Farklı uygulamalı medyan filtre (Different Applied Median Filter) |
| AWMF | Uyarlanabilir ağırlıklı ortalama filtre (Adaptive Weighted Mean Filter) |
| ARmF | Uyarlanabilir Riesz ortalama filtre (Adaptive Riesz Mean Filter) |
| SSIM | Yapısal Benzerlik (Structural Similarity) |

# ÖZET

**ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK PARAMETRELİ ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK ESNEK MATRİSLER VE ONLARIN PERFORMANS TEMELLİ DEĞER ATAMA PROBLEMİNE UYGULAMASI**

Tuğçe AYDIN
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Serdar ENGİNOĞLU
01/12/2020, 86

Bu çalışmada, aralık değerli sezgisel bulanık parametreli aralık değerli sezgisel bulanık esnek küme ($d$-küme) kavramı tanımlandı ve onun bazı temel özellikleri incelendi. Ardından, $d$-kümeler aracılığıyla bir esnek karar verme metodu önerildi ve bu metot işe alım sürecinde uygun adayların belirlenmesi ve gürültü kaldırmada kullanılan bazı filtrelere performans temelli değer atamaya ilişkin iki probleme uygulandı. Ayrıca, önerilen metodun sıralama performansı, alan yazındaki diğer dört son teknoloji esnek karar verme metodunun sıralama performansları ile karşılaştırıldı. Daha sonra, aralık değerli sezgisel bulanık parametreli aralık değerli sezgisel bulanık esnek matris ($d$-matris) kavramı tanımlandı ve onun bazı temel özellikleri incelendi. Ardından, $d$-kümelerde önerilen metot $d$-matrisler uzayına yapılandırıldı ve bir performans temelli değer atama problemine uygulandı. Son olarak, daha ileri araştırmalar için, $d$-küme ve $d$-matris kavramları tartışıldı.

**Anahtar sözcükler:** Bulanık Kümeler, Esnek Kümeler, Aralık Değerli Sezgisel Bulanık Kümeler, $d$-kümeler, $d$-matrisler, Esnek Karar Verme

## ABSTRACT

## INTERVAL-VALUED INTUITIONISTIC FUZZY PARAMETERIZED INTERVAL-VALUED INTUITIONISTIC FUZZY SOFT MATRICES AND THEIR APPLICATION TO A PERFORMANCE-BASED VALUE ASSIGNMENT PROBLEM

Tuğçe AYDIN
Çanakkale Onsekiz Mart University
School of Graduate Studies
Doctoral Dissertation in Department of Mathematics
Advisor: Asst. Prof. Dr. Serdar ENGİNOĞLU
12/01/2020, 86

In this study, the concept of interval-valued intuitionistic fuzzy parameterized interval-valued intuitionistic fuzzy soft sets ($d$-sets) was defined, and several of its basic properties were investigated. A soft decision-making method was then proposed via $d$-sets and was applied to two problems, i.e., determining eligible candidates in the recruitment process and performance-based value assignment to some filters used in image denoising. Moreover, the proposed method's ranking performance and those of the other four state-of-the-art soft decision-making methods were compared. Afterwards, the concept of interval-valued intuitionistic fuzzy parameterized interval-valued intuitionistic fuzzy soft matrices ($d$-matrices) was defined, and several of its basic properties were investigated. The method proposed in $d$-sets was then configured in $d$-matrices space and applied to a performance-based value assignment problem. Finally, the concepts of $d$-sets and $d$-matrices were discussed for further research.

**Keywords:** Fuzzy Sets, Soft Sets, Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets, $d$-sets, $d$-matrices, Soft Decision-Making

## İÇİNDEKİLER

**Sayfa No**


TEZ SINAVI SONUÇ FORMU ..... ii
İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI ..... iii
TEŞEKKÜR ..... iv
SİMGELER VE KISALTMALAR ..... v
ÖZET ..... vii
ABSTRACT ..... viii
TABLOLAR DİZİNİ ..... x
BÖLÜM 1
GİRİŞ ..... 1
BÖLÜM 2
TEMEL KAVRAMLAR ..... 5
BÖLÜM 3
ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK PARAMETRELİ ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK ESNEK KÜMELER ..... 16
BÖLÜM 4
*d*-KÜMELER YOLUYLA İNŞA EDİLEN BİR ESNEK KARAR VERME METODU ..... 34
4.1. İşe Alım Sürecinde Uygun Adayların Belirlenmesi Problemine Bir Uygulama ..... 35
4.2. Gürültü Kaldırmada Kullanılan Bazı Filtrelere Performans Temelli Değer Atama Problemine Bir Uygulama ..... 40
BÖLÜM 5
ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK PARAMETRELİ ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK ESNEK MATRİSLER ..... 46
BÖLÜM 6
*d*-MATRİSLER YOLUYLA PERFORMANS TEMELLİ DEĞER ATAMA ..... 60
BÖLÜM 7
SONUÇ VE ÖNERİLER ..... 79
KAYNAKLAR ..... 80
ÖZGEÇMİŞ ..... I

## TABLOLAR DİZİNİ

**Sayfa No**


Tablo 1. Önerilen metot ve Metot 1, 2, 3 ve 4'ün adaylar için karar kümeleri............. 40
Tablo 2. Önerilen metot ve Metot 1, 2, 3 ve 4 için adayların performans sıralamaları .. 40
Tablo 3. Kameraman ve Lena görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları.................... 41
Tablo 4. Jet uçağı ve babun görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları ....................... 42
Tablo 5. Önerilen metot ve Metot 1, 2, 3 ve 4'ün filtreler için karar kümeleri............. 45
Tablo 6. Önerilen metot ve Metot 1, 2, 3 ve 4 için filtrelerin performans sıralamaları .. 45
Tablo 7. Lena görüntüsü için filtrelerin SSIM sonuçları .......................................... 61
Tablo 8. Kameraman, Barbara, babun, biber, oturma odası ve göl görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları.......................................................................... 62
Tablo 9. Uçak, tepe, korsan, tekne, ev ve köprü görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları ......................................................................................... 63
Tablo 10. Elaine, çakmaktaşlar, çiçek, papağan, koyu saçlı kadın ve sarışın kadın görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları ................................................. 64
Tablo 11. Einstein görüntüsü için filtrelerin SSIM sonuçları ...................................... 65
Tablo 12. Badem, elma ve balon görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları ................ 69
Tablo 13. Muz, bilardo topları 1, bilardo topları 2, bina, iskambil kâğıtları 1 ve iskambil kâğıtları 2 görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları...................... 70
Tablo 14. Havuç, sandalye, ataç, madeni para, koltuk minderi ve ördek görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları ................................................................ 71
Tablo 15. Çit, çiçek, bahçe masası, gitar köprüsü, gitar perdesi ve gitar başı görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları ................................................. 72
Tablo 16. Klavye 1, klavye 2, aslan, multimetre, kalemler 1 ve kalemler 2 görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları ................................................................ 73
Tablo 17. Sütun, plastik, çatı, atkı, vida ve salyangoz görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları ......................................................................................... 74
Tablo 18. Çorap, şekerleme, domates 1, domates 2, aletler 1 ve aletler 2 görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları ................................................................ 75
Tablo 19. Ahşap oyunu görüntüsü için filtrelerin SSIM sonuçları ................................ 76

## BÖLÜM 1
## GİRİŞ

Klasik matematik araçları mühendislik, fizik, bilgisayar bilimleri, ekonomi, sosyal bilimler ve tıp bilimleri gibi birçok alanda belirsizlik içeren bazı problemlerle baş edebilmek için yetersiz kalmaktadır. Böyle problemlerin üstesinden gelebilmek için, birçok matematiksel araç önerilmiştir. Bu araçlardan biri olan ve bir elemanın kümeye üye olmasını $[0,1]$ kapalı aralığının elemanları yoluyla karakterize eden bulanık (fuzzy) küme kavramı Zadeh (1965) tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra bu kavramın bir genellemesi olan ve bir elemanın bir kümeye üye olma ve üye olmama derecesi ile karakterize edilen sezgisel (intuitionistic) bulanık küme kavramı Atanassov (1986) tarafından tanıtılmıştır. Ayrıca, bulanık kümelerin diğer bir genellemesi olan ve bir elemanın bir kümeye üye olmasını özel bir aralık ile karakterize eden aralık değerli (interval-valued) bulanık küme (Gorzałczany, 1987; Zadeh, 1975) kavramı ileri sürülmüştür. Daha sonra bulanık küme kavramındaki parametrelendirme aracı eksikliğini gidermek için, Molodtsov (1999) alternatifleri/nesneleri parametreler yoluyla sınıflandırmaya izin veren esnek (soft) küme kavramını önermiştir. Ayrıca, belirsizlik içeren problemlerin çok çeşitli olması nedeniyle yukarıda bahsedilen kavramların bulanık esnek küme (Maji, Biswas ve Roy, 2001), bulanık parametreli esnek küme (Çağman, Çıtak ve Enginoğlu, 2011), bulanık parametreli bulanık esnek küme (*fpfs*-küme) (Çağman, Çıtak ve Enginoğlu, 2010), bulanık parametreli aralık değerli bulanık esnek küme (Alkhazaleh, Salleh ve Hassan, 2011), sezgisel bulanık parametreli esnek küme (Deli ve Çağman, 2015), sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek küme (*ifpifs*-küme) (Karaaslan, 2016), bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek küme (*fpifs*-küme) (Sulukan, Çağman ve Aydın, 2019) ve aralık değerli bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek küme (*ivfpifs*-küme) (Kamacı, 2019) gibi çeşitli hibrit versiyonları tanımlanmıştır.

Ancak yukarıda bahsedilen kavramlar çoklu ölçüm sonuçlarını tek bir sonuca dönüştürmek için kullanılan ortalama ve medyan gibi bazı istatistiksel araçların veri kaybına yol açmasından dolayı belirli bir zaman diliminde elde edilen çoklu bulanık veya çoklu sezgisel bulanık değerlere sahip bir parametre veya alternatife hangi değerin atanacağı problemini veri kaybı olmadan direkt olarak modelleyemez. Örneğin, Çanakkale Boğazı'nda saatte on sinyal gönderen yirmi hızölçerin var olduğu ve her on sinyalin de bir ölçüm sonucu olarak depolandığı varsayılsın. Ayrıca, bir türbinin pervanesini döndürmek için anlık akışın yeterli olduğu durumda sinyal pozitif, aksi durumda negatif olarak depolansın. Burada, $a_n^x$ ve $b_n^x$ notasyonları, sırasıyla, $n$'inci ölçüm için bir $x$ hızölçeri tarafından gönderilen pozitif ve negatif sinyallerin sayısını göstersin ve her $n$ pozitif tamsayı için $a_n^x + b_n^x = 10$ olsun. O halde, beş ölçüm sonucunu gösteren $(a_n^x) = (5,3,6,8,1)$ ve $\mu(x) := \frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n} a_i^x$ ile tanımlanan üye olma fonksiyonu için $\mu$ bulanık kümesine $x$ hızölçerinin üye olma derecesi 0.46 olarak hesaplanabilir. Böylece, $x$ hızölçerinin üye olmama derecesi $\nu(x) = 1 - \mu(x) = 0.54$ olarak hesaplanır. Sonuç olarak, 0.46 değeri 100 sinyal için $x$ hızölçerinin pozitif sinyal sayısının 46 olduğunu göstermektedir. Benzer şekilde, 0.54 değeri 100 sinyal için $x$ hızölçerinin negatif sinyal sayısının 54 olduğunu göstermektedir. Ancak çoklu değerleri tek bir değer olarak düşünmek, veri kaybına yol açmaktadır. Diğer taraftan,

$$\alpha(x) := \left[\frac{\min\limits_{n} a_n^x}{\max\limits_{n} a_n^x + \max\limits_{n} b_n^x}, \frac{\max\limits_{n} a_n^x}{\max\limits_{n} a_n^x + \max\limits_{n} b_n^x}\right]$$

$$\beta(x) := \left[\frac{\min\limits_{n} b_n^x}{\max\limits_{n} a_n^x + \max\limits_{n} b_n^x}, \frac{\max\limits_{n} b_n^x}{\max\limits_{n} a_n^x + \max\limits_{n} b_n^x}\right]$$

$(a_n^x) = (5,3,6,8,1)$ ve $(b_n^x) = (5,7,4,2,9)$ için, bir aralık değerli sezgisel bulanık kümeye (*ivif*-kümeye) (Atanassov, 2020; Atanassov ve Gargov, 1989) $x$ hızölçerinin üye olma ve üye olmama dereceleri ${}^{[0.06,0.47]}_{[0.12,0.53]}$ olarak hesaplanabilir. Sonuç olarak, $[0.06, 0.47]$ değeri 100 sinyal için $x$ hızölçerinin pozitif sinyal sayısının 6 ile 47 arasında değiştiğini ifade etmektedir. Benzer şekilde, $[0.12, 0.53]$ değeri 100 sinyal için $x$ hızölçerinin negatif sinyal sayısının 12 ve 53 arasında olduğunu ifade etmektedir. Bu nedenle, bir *ivif*-değer bir bulanık veya sezgisel bulanık değerden daha fazla bilgi içerdiğinden böyle bir problemi modellemek için *ivif*-kümeleri kullanmak daha kullanışlıdır.

Bugüne kadar, karar verme (Atanassov, Marinov ve Atanassova, 2019; Çağman ve Enginoğlu, 2010b; Çağman, Enginoğlu ve Çıtak, 2011; Hao, Pei, Park, Phonexay ve Seo, 2018; Joshi, 2020; Kim ve diğerleri, 2018; Liu ve Jiang, 2020; Maji, Biswas ve Roy, 2003; Maji, Roy ve Biswas, 2002; Priyadharsini ve Balasubramaniam, 2019; Razak ve Mohamad, 2013; Selvachandran, John ve Salleh, 2017), cebir (Çıtak ve Çağman, 2015, 2017; Hemavathi, Muralikrishna ve Palanivel, 2018; Senapati ve Shum, 2019; Sezgin, 2016; Sezgin, Çağman ve Çıtak, 2019; Ullah, Karaaslan ve Ahmad, 2018), topoloji (Atmaca, 2017; Enginoğlu, Çağman, Karataş ve Aydın, 2015; Park, 2016, 2017; Riaz ve Hashmi, 2017; Şenel, 2016; Zorlutuna ve Atmaca, 2016) ve analiz (Riaz, Hashmi ve Farooq, 2018; Şenel, 2018) gibi birçok alanda yukarıda bahsedilen küme kavramları üzerine hem kuramsal hem de uygulamalı olarak pek çok çalışma yürütülmüştür.

Belirsizlik içeren problemlerin modellenmesinde kullanılan bu çeşitli küme türleri yüksek miktarda veri veya belirsizlik içeren problemlerde hesaplamaların elle yapılmasından kaynaklanan zaman, karmaşıklık ve hesaplama hataları gibi bazı dezavantajlara sahip olabilir. Bu zorlukların üstesinden gelebilmek için, Çağman ve Enginoğlu (2010a) belirsizlik içeren problemlerdeki verilerin bilgisayar ortamına aktarılıp işlenmesine olanak sağlayan esnek matris kavramını tanımlamış ve esnek max-min yöntemini önermiştir. Daha sonra, Çağman ve Enginoğlu (2012) bulanık esnek matris kavramını tanımlamış ve bu kavram yoluyla bir esnek karar verme metodu inşa etmiştir. Son zamanlarda, bulanık parametreli bulanık esnek matris (*fpfs*-matris) (Enginoğlu ve Çağman, 2020) ve sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek matris (*ifpifs*-matris) (Arslan, 2019; Enginoğlu ve Arslan, 2020) kavramları tanıtılmış ve esnek karar verme metotları önerilmiştir. Bahsi geçen *fpfs*-kümelerin, belirsizliği modelleme başarısı nedeniyle *fpfs*-küme kavramının alt yapıları yoluyla inşa edilen esnek karar verme metotları *fpfs*-matrisler yoluyla yapılandırılmış (Aydın ve Enginoğlu, 2019; Enginoğlu ve Memiş, 2018; Enginoğlu ve Öngel, 2020) ve yapılandırılan metotların bazıları performans temelli değer atama problemlerine başarılı bir şekilde uygulanmıştır (Aydın ve Enginoğlu, 2019; Enginoğlu, Memiş ve Arslan, 2018; Enginoğlu ve Öngel, 2020). Ayrıca, *fpfs*-matrisler aracılığıyla verileri sınıflandırma metotları geliştirilmiştir (Enginoğlu, Ay, Çağman ve Tolun, 2019; Memiş, Enginoğlu ve Erkan, 2019).

Ancak parametrelerin ve alternatiflerin ileri belirsizlikler içerdiği durumlarda bazı problemlerin matematiksel olarak modellenebilmesi için daha genel formlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu amaçla, bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde, aralık değerli sezgisel bulanık parametreli esnek küme (Deli ve Karataş, 2016) ve aralık değerli sezgisel bulanık esnek küme (Jiang, Tang, Chen, Liu ve Tang, 2010; Min, 2008) kavramlarının genel formu olarak görülebilen aralık değerli sezgisel bulanık parametreli aralık değerli sezgisel bulanık esnek küme ($d$-küme) kavramı tanımlandı ve onun bazı temel özellikleri incelendi.

Tezin dördüncü bölümünde, bir $d$-kümeyi alternatiflerin kümesi üzerinde bir $ivif$-kümeye indirgeyen bir birleştirme/toplama (aggregation) operatörü tanımlandı ve bu operatör kullanılarak, bir esnek karar verme metodu önerildi. Bu metot alternatiflerden optimum elemanların seçilmesini sağlamaktadır. Daha sonra, bu metot işe alım sürecinde uygun adayların belirlenmesi ve gürültü kaldırmada kullanılan bazı filtrelere performans temelli değer atamaya ilişkin iki probleme uygulandı. Ancak bu metot $d$-kümeler yoluyla önerilen ilk ve tek metot olduğundan, bu metodu başka bir metotla karşılaştırmak mümkün olmamaktadır. Bu zorluk ile başa çıkmak için, ortalama indirgeme (mean reduction), ortalama çift indirgeme (mean bireduction), ortalama çift indirgeme-indirgeme (mean bireduction-reduction) ve ortalama indirgeme-çift indirgeme (mean reduction-bireduction) olarak adlandırılan dört yeni kavram tanımlandı. Daha sonra, *ifpifs*-küme, *ivfpifs*-küme, *fpifs*-küme ve *fpfs*-küme yoluyla inşa edilen dört son teknoloji esnek karar verme metodu yukarıda bahsedilen problemlere uygulandı. Böylece, önerilen metot ile bu dört metodun adayları ve filtreleri sıralama performansları karşılaştırıldı.

Tezin beşinci bölümünde, $d$-kümeler yoluyla modellenebilen ve yüksek sayıda veri içeren problemlerdeki verilerin bilgisayar ortamına aktarılmasını sağlamak için, aralık değerli sezgisel bulanık parametreli aralık değerli sezgisel bulanık esnek matris ($d$-matris) kavramı tanımlandı ve onun bazı temel özellikleri incelendi.

Tezin altıncı bölümünde, $d$-kümeler yoluyla inşa edilen esnek karar verme metodu $d$-matrisler uzayına yapılandırıldı. Ayrıca, bu metot gürültü kaldırmada kullanılan bazı filtrelere performans temelli değer atamaya ilişkin bir probleme uygulandı.

Tezin son bölümünde, $d$-kümeler ve $d$-matrisler üzerine gelecek çalışmalar için bir tartışmaya yer verildi.

# BÖLÜM 2
# TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilk olarak, bu çalışmanın sonraki bölümlerinde gerekli olan bazı temel kavramlar ve ilgili özellikler çalışmada kullanılan notasyonlar dikkate alınarak verildi. Bu çalışma boyunca, $[0,1]$ kapalı aralığının tüm kapalı klasik alt aralıklarının kümesi $Int([0,1])$ ile gösterilmektedir ve $\gamma := [\gamma^-,\gamma^+]$, $\gamma_1 := [\gamma_1^-,\gamma_1^+]$, $\gamma_2 := [\gamma_2^-,\gamma_2^+]$ ve $\gamma_3 := [\gamma_3^-,\gamma_3^+]$.

**Tanım 2.1.** $\gamma_1,\gamma_2 \in Int([0,1])$ olsun. Eğer $\gamma_2^- \leq \gamma_1^-$ ve $\gamma_1^+ \leq \gamma_2^+$ oluyorsa, $\gamma_1$'e $\gamma_2$'nin bir klasik alt aralığı denir ve $\gamma_1 \subseteq \gamma_2$ ile gösterilir.

**Tanım 2.2.** $\gamma_1,\gamma_2 \in Int([0,1])$ olsun. Eğer $\gamma_1^- \leq \gamma_2^-$ ve $\gamma_1^+ \leq \gamma_2^+$ oluyorsa, $\gamma_1$'e $\gamma_2$'nin bir alt aralığı denir ve $\gamma_1 \tilde{\subseteq} \gamma_2$ ile gösterilir.

**Önerme 2.3.** $\gamma_1,\gamma_2 \in Int([0,1])$ olsun. O halde, $\gamma_1 \tilde{\leq} \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1 \tilde{\subseteq} \gamma_2$ biçimindedir.

**Önerme 2.4.** "$\tilde{\leq}$" bağıntısı $Int([0,1])$ kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

**Not 2.5.** $[0.5,0.6],[0.3,0.7] \in Int([0,1])$ verilsin. O halde, $0.5 \nleq 0.3$ ve $0.7 \nleq 0.6$ olduğundan $[0.5,0.6] \tilde{\nleq} [0.3,0.7]$ ve $[0.3,0.7] \tilde{\nleq} [0.5,0.6]$ elde edilir. Dolayısıyla, [0.5,0.6] ve [0.3,0.7] elemanları karşılaştırılamaz. Bu nedenle, $\tilde{\leq}$ bağıntısı $Int([0,1])$ kümesi üzerinde bir tam sıralama bağıntısı değildir.

**Not 2.6.** Bu çalışma boyunca, $Int([0,1])$ kümesinin elemanlarının supremumu ve infimumu "$\tilde{\leq}$" kısmi sıralama bağıntısına göre bulunmaktadır.

**Önerme 2.7.** $\gamma_1,\gamma_2 \in Int([0,1])$ olsun. O halde,

*i.* $\sup\{\gamma_1,\gamma_2\} = [\max\{\gamma_1^-,\gamma_2^-\},\max\{\gamma_1^+,\gamma_2^+\}]$

*ii.* $\inf\{\gamma_1,\gamma_2\} = [\min\{\gamma_1^-,\gamma_2^-\},\min\{\gamma_1^+,\gamma_2^+\}]$

biçimindedir.

**Önerme 2.8.** $\gamma \in Int([0,1])$, $[0,0] := 0$ ve $[1,1] := 1$ olsun. O halde,

*i.* $\sup\{\gamma,0\} = \gamma$

*ii.* $\inf\{\gamma,1\} = \gamma$

*iii.* $\sup\{\gamma,1\} = 1$

*iv.* $\inf\{\gamma,0\} = 0$

biçimindedir.

**Önerme 2.9.** $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3 \in Int([0,1])$ olsun. O halde,

*i.* $\sup\{\gamma_1,\gamma_2\} = \sup\{\gamma_2,\gamma_1\}$

*ii.* $\inf\{\gamma_1,\gamma_2\} = \inf\{\gamma_2,\gamma_1\}$

*iii.* $\sup\{\gamma_1,\sup\{\gamma_2,\gamma_3\}\} = \sup\{\sup\{\gamma_1,\gamma_2\},\gamma_3\}$

*iv.* $\inf\{\gamma_1,\inf\{\gamma_2,\gamma_3\}\} = \inf\{\inf\{\gamma_1,\gamma_2\},\gamma_3\}$

*v.* $\sup\{\gamma_1, \inf\{\gamma_2, \gamma_3\}\} = \inf\{\sup\{\gamma_1, \gamma_2\}, \sup\{\gamma_1, \gamma_3\}\}$
*vi.* $\inf\{\gamma_1, \sup\{\gamma_2, \gamma_3\}\} = \sup\{\inf\{\gamma_1, \gamma_2\}, \inf\{\gamma_1, \gamma_3\}\}$
biçimindedir.

**Tanım 2.10.** $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in Int([0,1])$ ve $c \in \mathbb{R}^+$ olsun. O halde,
*i.* $\gamma_1 + \gamma_2 := [\gamma_1^- + \gamma_2^-, \gamma_1^+ + \gamma_2^+]$
*ii.* $\gamma_1 - \gamma_2 := [\gamma_1^- - \gamma_2^+, \gamma_1^+ - \gamma_2^-]$
*iii.* $\gamma_1 \cdot \gamma_2 := [\gamma_1^- \cdot \gamma_2^-, \gamma_1^+ \cdot \gamma_2^+]$
*iv.* $c \cdot \gamma := [c \cdot \gamma^-, c \cdot \gamma^+]$
biçiminde tanımlanır.

**Tanım 2.11.** (Zadeh, 1965) $E$ bir evrensel küme ve $\mu$, $E$'den $[0,1]$ kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. O halde, $\mu$'nün grafiği olan $\{(x, \mu(x)) : x \in E\}$ kümesine $E$ üzerinde bir bulanık küme ($f$-küme) denir.

Ayrıca, bir $f$-kümede $\mu$ üye olma fonksiyonu olarak adlandırılır. $\mu$ fonksiyonu ile $\mu$'nün grafiği olan graf$(\mu) := \{(x, \mu(x)) : x \in E\}$ kümesinden herhangi biri verildiğinde diğeri tek türlü olarak belirlenebildiği için graf$(\mu)$ ve $\mu$ notasyonları birbirlerinin yerine kullanılabilir. Bu nedenle, herhangi bir karışıklığa neden olmadığı sürece, bir $f$-küme $\mu$ ile gösterilecektir. Kısalık için, $(x, \mu(x))$ yerine ${}^{\mu(x)}x$ notasyonu kullanılacaktır. Bu çalışma boyunca, $E$ üzerindeki tüm $f$-kümelerin kümesi $F(E)$ ile gösterilmektedir. Ayrıca, $E$ üzerinde bir $f$-küme $\mu := \left\{ {}^{\mu(x)}x : x \in E \right\}$ biçiminde ifade edilmektedir.

**Tanım 2.12.** (Atanassov, 1986) $E$ bir evrensel küme ve $\eta$, $E$'den $[0,1] \times [0,1]$ kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. O halde, $\eta$'nın grafiği olan $\{(x, \eta(x)) : x \in E\}$ kümesine $E$ üzerinde bir sezgisel bulanık küme (*if*-küme) denir.

Burada, her $x \in E$ için, $\eta(x) = (\mu(x), \nu(x))$ olmak üzere, $0 \leq \mu(x) + \nu(x) \leq 1$ biçimindedir. Ayrıca, bir *if*-kümede $\mu$ üye olma fonksiyonu, $\nu$ üye olmama fonksiyonu ve $\pi(x) = 1 - \mu(x) - \nu(x)$ değeri bir $x \in E$ elemanının belirsizlik derecesi olarak adlandırılır.

$\eta$ fonksiyonu ile $\eta$'nın grafiği olan graf$(\eta) := \{(x, \mu(x), \nu(x)) : x \in E\}$ kümesinden herhangi biri verildiğinde diğeri tek türlü olarak belirlenebildiği için graf$(\eta)$ ve $\eta$ notasyonları birbirlerinin yerine kullanılabilir. Bu nedenle, herhangi bir karışıklığa neden olmadığı sürece, bir *if*-küme $\eta$ ile gösterilecektir. Kısalık için, $(x, \mu(x), \nu(x))$ yerine ${}^{\mu(x)}_{\nu(x)}x$ notasyonu kullanılacaktır. Bu çalışma boyunca, $E$ üzerindeki tüm *if*-kümelerin kümesi $IF(E)$ ile gösterilmektedir. Ayrıca, $E$ üzerinde bir *if*-küme $\eta := \left\{ {}^{\mu(x)}_{\nu(x)}x : x \in E \right\}$ biçiminde ifade edilmektedir.

**Not 2.13.** (Atanassov, 1986) Bir $f$-küme $\mu := \left\{ {}^{\mu(x)}_{1-\mu(x)}x : x \in E \right\}$ biçiminde bir *if*-küme olarak ifade edilir.

**Not 2.14.** Yazımda kolaylık sağlaması açısından, bir karışıklığa neden olmadığı sürece, ${}^{0}x$ biçimindeki elemanlar bir $f$-kümede ve ${}^{0}_{1}x$ biçimindeki elemanlar bir $if$-kümede gösterilmeyebilir.

**Tanım 2.15.** (Molodtsov, 1999) $U$ bir evrensel küme, $E$ parametrelerin bir kümesi, $P(U)$, $U$'nun kuvvet kümesi ve $f$, $E$'den $P(U)$'ya tanımlı bir fonksiyon olsun. O halde, $f$'nin grafiği olan $\{(x, f(x)) : x \in E\}$ kümesine $U$ üzerinde $E$ yoluyla parametrize edilmiş (kısaca $U$ üzerinde) bir esnek küme denir.

**Tanım 2.16.** (Çağman ve diğerleri, 2010) $U$ bir evrensel küme, $E$ parametrelerin bir kümesi, $\mu \in F(E)$ ve $f$, $\mu$'den $F(U)$ kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. O halde, $f$'nin grafiği olan $\left\{\left({}^{\mu(x)}x, f({}^{\mu(x)}x)\right) : x \in E\right\}$ kümesine $U$ üzerinde $E$ yoluyla parametrize edilmiş (kısaca $U$ üzerinde) bir bulanık parametreli bulanık esnek küme (*fpfs*-küme) denir.

**Tanım 2.17.** (Sulukan ve diğerleri, 2019) $U$ bir evrensel küme, $E$ parametrelerin bir kümesi, $\mu \in F(E)$ ve $f$, $\mu$'den $IF(U)$ kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. O halde, $f$'nin grafiği olan $\left\{\left({}^{\mu(x)}x, f({}^{\mu(x)}x)\right) : x \in E\right\}$ kümesine $U$ üzerinde $E$ yoluyla parametrize edilmiş (kısaca $U$ üzerinde) bir bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek küme (*fpifs*-küme) denir.

**Tanım 2.18.** (Karaaslan, 2016) $U$ bir evrensel küme, $E$ parametrelerin bir kümesi, $\eta \in IF(E)$ ve $f$, $\eta$'dan $IF(U)$ kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. O halde, $f$'nin grafiği olan $\left\{\left({}^{\mu(x)}_{\nu(x)}x, f({}^{\mu(x)}_{\nu(x)}x)\right) : x \in E\right\}$ kümesine $U$ üzerinde $E$ yoluyla parametrize edilmiş (kısaca $U$ üzerinde) bir sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek küme (*ifpifs*-küme) denir.

Bu bölümde, ikinci olarak, aralık değerli sezgisel bulanık küme (Atanassov ve Gargov, 1989) kavramı ve bu kavramın bazı temel özellikleri (Atanassov, 1994, 2020; Atanassov ve Gargov, 1989) verildi.

**Tanım 2.19.** (Atanassov ve Gargov, 1989) $E$ bir evrensel küme ve $\kappa$, $E$'den $Int([0,1]) \times Int([0,1])$ kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. O halde, $\kappa$'nın grafiği olan $\{(x, \kappa(x)) : x \in E\}$ kümesine $E$ üzerinde bir aralık değerli sezgisel bulanık küme ($ivif$-küme) denir.

Burada, her $x \in E$ için, $\kappa(x) = (\alpha(x), \beta(x))$, $\alpha(x) := [\alpha^-(x), \alpha^+(x)]$ ve $\beta(x) := [\beta^-(x), \beta^+(x)]$ olmak üzere, $\alpha^+(x) + \beta^+(x) \leq 1$ biçimindedir. Ayrıca, bir $ivif$-kümede $\alpha$ üye olma fonksiyonu ve $\beta$ üye olmama fonksiyonu olarak adlandırılır.

$\kappa$ fonksiyonu ile $\kappa$'nın grafiği olan graf$(\kappa) := \{(x, \alpha(x), \beta(x)) : x \in E\}$ kümesinden herhangi biri verildiğinde diğeri tek türlü olarak belirlenebildiği için graf$(\kappa)$ ve $\kappa$ notasyonları birbirlerinin yerine kullanılabilir. Bu nedenle, herhangi bir karışıklığa neden olmadığı sürece, bir $ivif$-küme $\kappa$ ile gösterilecektir. Kısalık için, $(x, \alpha(x), \beta(x))$ yerine ${}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x$

notasyonu kullanılacaktır. Bu çalışma boyunca, $E$ üzerindeki tüm *ivif*-kümelerin kümesi $IVIF(E)$ ile gösterilmektedir. Ayrıca, $E$ üzerinde bir *ivif*-küme $\kappa := \left\{ {}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x : x \in E \right\}$ biçiminde ifade edilmektedir.

**Not 2.20.** Her $x \in E$ için, $[\alpha(x), \alpha(x)] := \alpha(x)$ olduğundan yazımda kolaylık sağlaması için, ${}^{[\alpha(x),\alpha(x)]}_{[\beta(x),\beta(x)]}x$ yerine ${}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x$ notasyonu kullanılabilir. Ayrıca, yine yazımda kolaylık sağlaması açısından, bir karışıklığa neden olmadığı sürece, ${}^{0}_{1}x$ biçimindeki elemanlar bir *ivif*-kümede gösterilmeyebilir.

**Örnek 2.21.** $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ bir evrensel küme olsun. O halde,

$$\kappa = \left\{ {}^{[0.2,0.4]}_{[0.4,0.6]}x_1, {}^{[0,0.2]}_{[0.5,0.7]}x_2, {}^{[0.3,0.5]}_{[0.1,0.2]}x_4 \right\}$$

$E$ üzerinde bir *ivif*-kümedir.

Bu çalışma boyunca, $\lambda, \varepsilon \in Int([0,1])$ olmak üzere her $x \in E$ için, $\alpha(x) = \lambda$ ve $\beta(x) = \varepsilon$ olduğunda $E$ üzerinde bir *ivif*-küme ${}^{\lambda}_{\varepsilon}E$ ile gösterilmektedir.

**Tanım 2.22.** (Atanassov, 1994) $\kappa \in IVIF(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için, $\alpha(x) = 0$ ve $\beta(x) = 1$ oluyorsa, $\kappa$'ya boş *ivif*-küme denir ve ${}^{0}_{1}E$ veya $0_E$ ile gösterilir.

**Tanım 2.23.** (Atanassov, 1994) $\kappa \in IVIF(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için, $\alpha(x) = 1$ ve $\beta(x) = 0$ oluyorsa, $\kappa$'ya evrensel *ivif*-küme denir ve ${}^{1}_{0}E$ veya $1_E$ ile gösterilir.

**Tanım 2.24.** (Atanassov ve Gargov, 1989) $\kappa_1, \kappa_2 \in IVIF(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için, $\alpha_1(x) \tilde{\leq} \alpha_2(x)$ ve $\beta_2(x) \tilde{\leq} \beta_1(x)$ oluyorsa, $\kappa_1$'e $\kappa_2$'nin bir alt kümesi denir ve $\kappa_1 \tilde{\subseteq} \kappa_2$ ile gösterilir.

**Önerme 2.25.** $\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in IVIF(E)$ olsun. O halde,

*i.* $\kappa \tilde{\subseteq} 1_E$

*ii.* $0_E \tilde{\subseteq} \kappa$

*iii.* $\kappa \tilde{\subseteq} \kappa$

*iv.* $[\kappa_1 \tilde{\subseteq} \kappa_2 \wedge \kappa_2 \tilde{\subseteq} \kappa_3] \Rightarrow \kappa_1 \tilde{\subseteq} \kappa_3$

biçimindedir.

**Önerme 2.26.** $\kappa_1, \kappa_2 \in IVIF(E)$ olsun. O halde, $\kappa_1 \tilde{\leq} \kappa_2 \Leftrightarrow \kappa_1 \tilde{\subseteq} \kappa_2$ biçimindedir.

**Tanım 2.27.** (Atanassov ve Gargov, 1989) $\kappa_1, \kappa_2 \in IVIF(E)$ olsun. Eğer $\kappa_1 \tilde{\leq} \kappa_2$ ve $\kappa_2 \tilde{\leq} \kappa_1$ oluyorsa, $\kappa_1$ ve $\kappa_2$'ye eşit *ivif*-kümeler denir ve $\kappa_1 = \kappa_2$ ile gösterilir.

**Önerme 2.28.** $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in IVIF(E)$ olsun. O halde,

$$[\kappa_1 = \kappa_2 \wedge \kappa_2 = \kappa_3] \Rightarrow \kappa_1 = \kappa_3$$

biçimindedir.

**Tanım 2.29.** $\kappa_1, \kappa_2 \in IVIF(E)$ olsun. Eğer $\kappa_1 \tilde{\subseteq} \kappa_2$ ve $\kappa_1 \neq \kappa_2$ oluyorsa, $\kappa_1$'e $\kappa_2$'nin bir öz alt kümesi denir ve $\kappa_1 \tilde{\subsetneq} \kappa_2$ ile gösterilir.

**Tanım 2.30.** (Atanassov ve Gargov, 1989) $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in IVIF(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için, $\alpha_3(x) = \sup\{\alpha_1(x), \alpha_2(x)\}$ ve $\beta_3(x) = \inf\{\beta_1(x), \beta_2(x)\}$ oluyorsa, $\kappa_3$'e $\kappa_1$ ile $\kappa_2$'nin birleşimi denir ve $\kappa_1 \tilde{\cup} \kappa_2$ ile gösterilir.

**Önerme 2.31.** (Atanassov, 1994) $\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in IVIF(E)$ olsun. O halde,

*i.* $\kappa \tilde{\cup} \kappa = \kappa$

*ii.* $\kappa_1 \tilde{\cup} \kappa_2 = \kappa_2 \tilde{\cup} \kappa_1$

*iii.* $(\kappa_1 \tilde{\cup} \kappa_2) \tilde{\cup} \kappa_3 = \kappa_1 \tilde{\cup} (\kappa_2 \tilde{\cup} \kappa_3)$

biçimindedir.

**Önerme 2.32.** $\kappa, \kappa_1, \kappa_2 \in IVIF(E)$ olsun. O halde,

*i.* $\kappa \tilde{\cup} 0_E = \kappa$ (Atanassov, 2020)

*ii.* $\kappa \tilde{\cup} 1_E = 1_E$

*iii.* $[\kappa_1 \tilde{\subseteq} \kappa_2 \Rightarrow \kappa_1 \tilde{\cup} \kappa_2 = \kappa_2]$

biçimindedir.

**Tanım 2.33.** (Atanassov ve Gargov, 1989) $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in IVIF(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için, $\alpha_3(x) = \inf\{\alpha_1(x), \alpha_2(x)\}$ ve $\beta_3(x) = \sup\{\beta_1(x), \beta_2(x)\}$ oluyorsa, $\kappa_3$'e $\kappa_1$ ile $\kappa_2$'nin kesişimi denir ve $\kappa_1 \tilde{\cap} \kappa_2$ ile gösterilir.

**Önerme 2.34.** (Atanassov, 1994) $\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in IVIF(E)$ olsun. O halde,

*i.* $\kappa \tilde{\cap} \kappa = \kappa$

*ii.* $\kappa_1 \tilde{\cap} \kappa_2 = \kappa_2 \tilde{\cap} \kappa_1$

*iii.* $(\kappa_1 \tilde{\cap} \kappa_2) \tilde{\cap} \kappa_3 = \kappa_1 \tilde{\cap} (\kappa_2 \tilde{\cap} \kappa_3)$

biçimindedir.

**Önerme 2.35.** $\kappa, \kappa_1, \kappa_2 \in IVIF(E)$ olsun. O halde,

*i.* $\kappa \tilde{\cap} 1_E = \kappa$

*ii.* $\kappa \tilde{\cap} 0_E = 0_E$ (Atanassov, 2020)

*iii.* $[\kappa_1 \tilde{\subseteq} \kappa_2 \Rightarrow \kappa_1 \tilde{\cap} \kappa_2 = \kappa_1]$

biçimindedir.

**Önerme 2.36.** (Atanassov, 1994) $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in IVIF(E)$ olsun. O halde,

*i.* $\kappa_1 \tilde{\cup} (\kappa_2 \tilde{\cap} \kappa_3) = (\kappa_1 \tilde{\cup} \kappa_2) \tilde{\cap} (\kappa_1 \tilde{\cup} \kappa_3)$

*ii.* $\kappa_1 \tilde{\cap} (\kappa_2 \tilde{\cup} \kappa_3) = (\kappa_1 \tilde{\cap} \kappa_2) \tilde{\cup} (\kappa_1 \tilde{\cap} \kappa_3)$

biçimindedir.

**Tanım 2.37.** $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in IVIF(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için, $\alpha_3(x) = \inf\{\alpha_1(x),$

$\beta_2(x)\}$ ve $\beta_3(x) = \sup\{\beta_1(x), \alpha_2(x)\}$ oluyorsa, $\kappa_3$'e $\kappa_1$ ile $\kappa_2$'nin farkı denir ve $\kappa_1 \tilde{\setminus} \kappa_2$ ile gösterilir.

**Önerme 2.38.** $\kappa \in IVIF(E)$ olsun. O halde,

*i.* $\kappa \tilde{\setminus} 0_E = \kappa$

*ii.* $\kappa \tilde{\setminus} 1_E = 0_E$

*iii.* $0_E \tilde{\setminus} \kappa = 0_E$

biçimindedir.

**Not 2.39.** $E = \{x\}$ bir evrensel küme olmak üzere $\kappa_1 = \left\{ {}^{[0.1,0.3]}_{[0.2,0.4]} x \right\}$, $\kappa_2 = \left\{ {}^{[0.4,0.5]}_{[0,0.1]} x \right\}$ ve $\kappa_3 = \left\{ {}^{[0.5,0.7]}_{[0.1,0.2]} x \right\}$ verilsin. O halde, $\kappa_1 \tilde{\setminus} \kappa_2 = \left\{ {}^{[0,0.1]}_{[0.4,0.5]} x \right\}$ ve $\kappa_2 \tilde{\setminus} \kappa_1 = \left\{ {}^{[0.2,0.4]}_{[0.1,0.3]} x \right\}$ olduğundan $\kappa_1 \tilde{\setminus} \kappa_2 \neq \kappa_2 \tilde{\setminus} \kappa_1$ elde edilir. Benzer şekilde, $\kappa_1 \tilde{\setminus} (\kappa_2 \tilde{\setminus} \kappa_3) = \left\{ {}^{[0.1,0.3]}_{[0.2,0.4]} x \right\}$ ve $(\kappa_1 \tilde{\setminus} \kappa_2) \tilde{\setminus} \kappa_3 = \left\{ {}^{[0,0.1]}_{[0.5,0.7]} x \right\}$ olduğundan $\kappa_1 \tilde{\setminus} (\kappa_2 \tilde{\setminus} \kappa_3) \neq (\kappa_1 \tilde{\setminus} \kappa_2) \tilde{\setminus} \kappa_3$ elde edilir. Dolayısıyla, *ivif*-kümelerde fark işlemi değişme ve birleşme özelliklerini sağlamaz.

**Tanım 2.40.** (Atanassov ve Gargov, 1989) $\kappa_1, \kappa_2 \in IVIF(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için, $\alpha_2(x) = \beta_1(x)$ ve $\beta_2(x) = \alpha_1(x)$ oluyorsa, $\kappa_2$'ye $\kappa_1$'in tümleyeni denir ve $\kappa_1^{\tilde{c}}$ ile gösterilir.

Diğer bir ifadeyle, $\kappa_1^{\tilde{c}} = 1_E \tilde{\setminus} \kappa_1$ biçimindedir.

**Önerme 2.41.** $\kappa, \kappa_1, \kappa_2 \in IVIF(E)$ olsun. O halde,

*i.* $(\kappa^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = \kappa$

*ii.* $0_E^{\tilde{c}} = 1_E$

*iii.* $\kappa_1 \tilde{\setminus} \kappa_2 = \kappa_1 \tilde{\cap} \kappa_2^{\tilde{c}}$

*iv.* $[\kappa_1 \tilde{\subseteq} \kappa_2 \Rightarrow \kappa_2^{\tilde{c}} \tilde{\subseteq} \kappa_1^{\tilde{c}}]$

biçimindedir.

**Önerme 2.42.** (Atanassov ve Gargov, 1989) $\kappa_1, \kappa_2 \in IVIF(E)$ olsun. O halde, aşağıdaki De Morgan kuralları sağlanır.

*i.* $(\kappa_1 \tilde{\cup} \kappa_2)^{\tilde{c}} = \kappa_1^{\tilde{c}} \tilde{\cap} \kappa_2^{\tilde{c}}$

*ii.* $(\kappa_1 \tilde{\cap} \kappa_2)^{\tilde{c}} = \kappa_1^{\tilde{c}} \tilde{\cup} \kappa_2^{\tilde{c}}$

**Tanım 2.43.** $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in IVIF(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için,

$$\alpha_3(x) = \sup\{\inf\{\alpha_1(x), \beta_2(x)\}, \inf\{\alpha_2(x), \beta_1(x)\}\}$$

ve

$$\beta_3(x) = \inf\{\sup\{\beta_1(x), \alpha_2(x)\}, \sup\{\beta_2(x), \alpha_1(x)\}\}$$

oluyorsa, $\kappa_3$'e $\kappa_1$ ile $\kappa_2$'nin simetrik farkı denir ve $\kappa_1 \tilde{\triangle} \kappa_2$ ile gösterilir.

**Önerme 2.44.** $\kappa, \kappa_1, \kappa_2 \in IVIF(E)$ olsun. O halde,

*i.* $\kappa \tilde{\triangle} 0_E = \kappa$

*ii.* $\kappa \tilde{\triangle} 1_E = \kappa^{\tilde{c}}$

*iii.* $\kappa_1 \tilde{\triangle} \kappa_2 = \kappa_2 \tilde{\triangle} \kappa_1$

biçimindedir.

KANIT. $\kappa \in IVIF(E)$ olsun.

*i.* O halde,

$$\begin{aligned}
\kappa \tilde{\triangle} 0_E &= \left\{ {}^{\alpha(x)}_{\beta(x)} x : x \in E \right\} \tilde{\triangle} \left\{ {}^{0}_{1} x : x \in E \right\} \\
&= \left\{ {}^{\sup\{\inf\{\alpha(x),1\},\inf\{0,\beta(x)\}\}}_{\inf\{\sup\{\beta(x),0\},\sup\{1,\alpha(x)\}\}} x : x \in E \right\} \\
&= \left\{ {}^{\sup\{\alpha(x),0\}}_{\inf\{\beta(x),1\}} x : x \in E \right\} \\
&= \left\{ {}^{\alpha(x)}_{\beta(x)} x : x \in E \right\} \\
&= \kappa
\end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer eşitliklerin kanıtları da benzer biçimde yapılabilir. □

**Not 2.45.** $E = \{x\}$ bir evrensel küme olmak üzere $\kappa_1 = \left\{ {}^{[0.2,0.3]}_{[0.4,0.7]} x \right\}$, $\kappa_2 = \left\{ {}^{[0.2,0.4]}_{[0.5,0.6]} x \right\}$ ve $\kappa_3 = \left\{ {}^{[0.1,0.4]}_{[0,0.5]} x \right\}$ verilsin. O halde,

$$\begin{aligned}
\kappa_1 \tilde{\triangle} (\kappa_2 \tilde{\triangle} \kappa_3) &= \left\{ {}^{[0.2,0.3]}_{[0.4,0.7]} x \right\} \tilde{\triangle} \left( \left\{ {}^{[0.2,0.4]}_{[0.5,0.6]} x \right\} \tilde{\triangle} \left\{ {}^{[0.1,0.4]}_{[0,0.5]} x \right\} \right) \\
&= \left\{ {}^{[0.2,0.3]}_{[0.4,0.7]} x \right\} \tilde{\triangle} \left\{ {}^{[0.1,0.4]}_{[0.2,0.5]} x \right\} \\
&= \left\{ {}^{[0.2,0.4]}_{[0.2,0.5]} x \right\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\kappa_1 \tilde{\triangle} \kappa_2) \tilde{\triangle} \kappa_3 &= \left( \left\{ {}^{[0.2,0.3]}_{[0.4,0.7]} x \right\} \tilde{\triangle} \left\{ {}^{[0.2,0.4]}_{[0.5,0.6]} x \right\} \right) \tilde{\triangle} \left\{ {}^{[0.1,0.4]}_{[0,0.5]} x \right\} \\
&= \left\{ {}^{[0.2,0.4]}_{[0.4,0.6]} x \right\} \tilde{\triangle} \left\{ {}^{[0.1,0.4]}_{[0,0.5]} x \right\} \\
&= \left\{ {}^{[0.1,0.4]}_{[0.2,0.5]} x \right\}
\end{aligned}$$

olduğundan $\kappa_1 \tilde{\triangle} (\kappa_2 \tilde{\triangle} \kappa_3) \neq (\kappa_1 \tilde{\triangle} \kappa_2) \tilde{\triangle} \kappa_3$ elde edilir. Dolayısıyla, *ivif*-kümelerde simetrik fark işlemi birleşme özelliğini sağlamaz.

**Tanım 2.46.** $\kappa_1, \kappa_2 \in IVIF(E)$ olsun. Eğer $\kappa_1 \tilde{\cap} \kappa_2 = 0_E$ oluyorsa, $\kappa_1$ ile $\kappa_2$'ye ayrık *ivif*-kümeler denir.

**Tanım 2.47.** (Atanassov, 1994) $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in IVIF(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için,

$$\alpha_3(x) = [\alpha_1^-(x) + \alpha_2^-(x) - \alpha_1^-(x) \cdot \alpha_2^-(x), \alpha_1^+(x) + \alpha_2^+(x) - \alpha_1^+(x) \cdot \alpha_2^+(x)]$$

ve

$$\beta_3(x) = [\beta_1^-(x) \cdot \beta_2^-(x), \beta_1^+(x) \cdot \beta_2^+(x)]$$

oluyorsa, $\kappa_3$'e $\kappa_1$ ile $\kappa_2$'nin toplamı denir ve $\kappa_1 \tilde{+} \kappa_2$ ile gösterilir.

**Önerme 2.48.** (Atanassov, 1994) $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in IVIF(E)$ olsun. O halde,

*i.* $\kappa_1 \tilde{+} \kappa_2 = \kappa_2 \tilde{+} \kappa_1$

*ii.* $(\kappa_1 \tilde{+} \kappa_2) \tilde{+} \kappa_3 = \kappa_1 \tilde{+} (\kappa_2 \tilde{+} \kappa_3)$

biçimindedir.

**Önerme 2.49.** $\kappa \in IVIF(E)$ olsun. O halde,

*i.* $\kappa \tilde{+} 0_E = \kappa$ (Atanassov, 2020)

*ii.* $\kappa \tilde{+} 1_E = 1_E$

biçimindedir.

**Tanım 2.50.** (Atanassov, 1994) $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in IVIF(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için,

$$\alpha_3(x) = [\alpha_1^-(x) \cdot \alpha_2^-(x), \alpha_1^+(x) \cdot \alpha_2^+(x)]$$

ve

$$\beta_3(x) = [\beta_1^-(x) + \beta_2^-(x) - \beta_1^-(x) \cdot \beta_2^-(x), \beta_1^+(x) + \beta_2^+(x) - \beta_1^+(x) \cdot \beta_2^+(x)]$$

oluyorsa, $\kappa_3$'e $\kappa_1$ ile $\kappa_2$'nin çarpımı denir ve $\kappa_1 \tilde{\cdot} \kappa_2$ ile gösterilir.

**Önerme 2.51.** (Atanassov, 1994) $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in IVIF(E)$ olsun. O halde,

*i.* $\kappa_1 \tilde{\cdot} \kappa_2 = \kappa_2 \tilde{\cdot} \kappa_1$

*ii.* $(\kappa_1 \tilde{\cdot} \kappa_2) \tilde{\cdot} \kappa_3 = \kappa_1 \tilde{\cdot} (\kappa_2 \tilde{\cdot} \kappa_3)$

biçimindedir.

**Önerme 2.52.** $\kappa \in IVIF(E)$ olsun. O halde,

*i.* $\kappa \tilde{\cdot} 1_E = \kappa$

*ii.* $\kappa \tilde{\cdot} 0_E = 0_E$ (Atanassov, 2020)

biçimindedir.

**Önerme 2.53.** (Atanassov, 1994) $\kappa_1, \kappa_2 \in IVIF(E)$ olsun. O halde, aşağıdaki De Morgan kuralları sağlanır.

*i.* $(\kappa_1 \tilde{+} \kappa_2)^{\tilde{c}} = \kappa_1^{\tilde{c}} \tilde{\cdot} \kappa_2^{\tilde{c}}$

*ii.* $(\kappa_1 \tilde{\cdot} \kappa_2)^{\tilde{c}} = \kappa_1^{\tilde{c}} \tilde{+} \kappa_2^{\tilde{c}}$

**Tanım 2.54.** (Huang, Zhuang ve Li, 2013) $\kappa \in IVIF(E)$ ve $|E| = n$ olsun. O halde,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left( 1 + \frac{\alpha^-(x_i) + \alpha^+(x_i)}{2} - \frac{\beta^-(x_i) + \beta^+(x_i)}{2} \right)$$

reel sayısına $\kappa$'nın ortalama kardinalitesi denir ve $|\kappa|_a$ ile gösterilir.

Bu bölümde, son olarak, diğer dört son teknoloji esnek karar verme metodu (Çağman ve diğerleri, 2010; Kamacı, 2019; Karaaslan, 2016; Sulukan ve diğerleri, 2019) bu çalışma boyunca kullanılan notasyonlar dikkate alınarak verildi. Burada, Karaaslan (2016)'da verilen metodun son adımı tüm alternatifleri sıralayabilecek biçimde düzenlendi.

*Metot 1'in Algoritma Adımları* (Karaaslan, 2016)

**Adım 1.** $U$ üzerinde bir

$$f = \left\{ \left( {}^{\mu(x)}_{\nu(x)}x, \left\{ {}^{\rho_x(u)}_{\sigma_x(u)}u : u \in U \right\} \right) : x \in E \right\}$$

*ifpifs*-kümesi inşa edilir.

**Adım 2.**

$$\rho^*(u) = \frac{1}{|E|} \sum_{x \in E} \mu(x) \rho_x(u)$$

ve

$$\sigma^*(u) = \frac{1}{|E|} \sum_{x \in E} \nu(x) \sigma_x(u)$$

olacak biçimde bir $f^* = \left\{ {}^{\rho^*(u)}_{\sigma^*(u)}u : u \in U \right\}$ *if*-kümesi elde edilir. Burada, $|E|$, $E$'nin kardinalitesini gösterir.

**Adım 3.** Her $u \in U$ için,

$$\xi(u) = \frac{\rho^*(u)}{\rho^*(u) + \sigma^*(u)}$$

değerleri elde edilir.

**Adım 4.** $d(u_k) = \frac{\xi(u_k)}{\max\limits_i \xi(u_i)}$ olacak biçimde bir $\left\{ {}^{d(u_k)}u_k | u_k \in U \right\}$ karar kümesi elde edilir.

*if*-küme (Atanassov, 1986) ve aralık değerli bulanık küme (Gorzałczany, 1987; Zadeh, 1975) kavramlarının birbirine denk olduğu Atanassov ve Gargov (1989) tarafından kanıtlanmıştır. Dolayısıyla, aralık değerli bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek küme (*ivfpifs*-küme) (Kamacı, 2019) ve *ifpifs*-küme (Karaaslan, 2016) kavramlarının da denk olduğu görülmektedir. Bu nedenle, Kamacı (2019)'da verilen metodun algoritması *ifpifs*-küme kavramı kullanılarak ifade edildi.

*Metot 2'nin Algoritma Adımları* (Kamacı, 2019)

**Adım 1.** $U$ üzerinde bir

$$f = \left\{ \left( {}^{\mu(x)}_{\nu(x)}x, \left\{ {}^{\rho_x(u)}_{\sigma_x(u)}u : u \in U \right\} \right) : x \in E \right\}$$

*ifpifs*-kümesi inşa edilir.

**Adım 2.** Bir $\kappa_1 = \left\{ {}^{\alpha_1(u)}_{\beta_1(u)} u : u \in U \right\}$ *ivif*-kümesi elde edilir. Burada,

$$\alpha_1(u) = \left[ 1 - \prod_{x \in E} (1 - \mu(x)\rho_x(u)), 1 - \prod_{x \in E} (1 - (1 - \nu(x))\rho_x(u)) \right]$$

ve

$$\beta_1(u) = \left[ \prod_{x \in E} \mu(x)\sigma_x(u), \prod_{x \in E} (1 - \nu(x))\sigma_x(u) \right]$$

biçimindedir.

**Adım 3.** Bir $\kappa_2 = \left\{ {}^{\alpha_2(u)}_{\beta_2(u)} u : u \in U \right\}$ *ivif*-kümesi elde edilir. Burada,

$$\alpha_2(u) = \left[ \prod_{x \in E} \mu(x)\rho_x(u), \prod_{x \in E} (1 - \nu(x))\rho_x(u) \right]$$

ve

$$\beta_2(u) = \left[ 1 - \prod_{x \in E} (1 - \mu(x)\sigma_x(u)), 1 - \prod_{x \in E} (1 - (1 - \nu(x))\sigma_x(u)) \right]$$

biçimindedir.

**Adım 4.** $\kappa_3 := \kappa_1 \tilde{+} \kappa_2$ ile tanımlı bir $\kappa_3 = \left\{ {}^{\alpha_3(u)}_{\beta_3(u)} u : u \in U \right\}$ karar kümesi elde edilir.

**Adım 5.** Aşağıdaki biçimde ifade edilen tam sıralama bağıntısı yoluyla alternatifler arasından optimum elemanlar seçilir (Tan, 2011; Xu, 2007).

$$\tfrac{\alpha}{\beta} \preceq \tfrac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} \Leftrightarrow \left[ \left( s_1(\tfrac{\alpha}{\beta}) < s_1(\tfrac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}) \right) \vee \left( s_1(\tfrac{\alpha}{\beta}) = s_1(\tfrac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}) \wedge s_2(\tfrac{\alpha}{\beta}) \leq s_2(\tfrac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}) \right) \right]$$

Burada,

$$s_1(\tfrac{\alpha}{\beta}) = \frac{\alpha^- - \beta^- + \alpha^+ - \beta^+}{2}$$

ve

$$s_2(\tfrac{\alpha}{\beta}) = \frac{\alpha^- + \beta^- + \alpha^+ + \beta^+}{2}$$

biçimindedir. Ayrıca, $\frac{\alpha}{\beta} := \frac{[\alpha^-, \alpha^+]}{[\beta^-, \beta^+]}$ ve $\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} := \frac{[\tilde{\alpha}^-, \tilde{\alpha}^+]}{[\tilde{\beta}^-, \tilde{\beta}^+]}$ birer *ivif*-değerdir.

*Metot 3'ün Algoritma Adımları* (Sulukan ve diğerleri, 2019)

**Adım 1.** $U$ üzerinde bir

$$f = \left\{ \left( {}^{\mu(x)}x, \left\{ {}^{\rho_x(u)}_{\sigma_x(u)} u : u \in U \right\} \right) : x \in E \right\}$$

*fpifs*-kümesi inşa edilir.

**Adım 2.** Her $u \in U$ için,

$$\omega(u) = \frac{1}{|E|} \sum_{x \in E} \mu(x)(\rho_x(u) - \sigma_x(u))$$

değerleri elde edilir. Burada, $|E|$, $E$'nin kardinalitesini gösterir.

**Adım 3.** $d(u_k) = \frac{\omega(u_k)+|\min_i \omega(u_i)|}{\max_i \omega(u_i)+|\min_i \omega(u_i)|}$ olacak biçimde bir $\left\{^{d(u_k)}u_k | u_k \in U\right\}$ karar kümesi elde edilir.

<u>*Metot 4'ün Algoritma Adımları* (Çağman ve diğerleri, 2010)</u>

**Adım 1.** $U$ üzerinde bir

$$f = \left\{ \left( ^{\mu(x)}x, \left\{ ^{\nu_x(u)}u : u \in U \right\} \right) : x \in E \right\}$$

*fpfs*-kümesi inşa edilir.

**Adım 2.**

$$\nu^*(u) = \frac{1}{|E|} \sum_{x \in E} \mu(x)\nu_x(u)$$

olacak biçimde bir $f^* = \left\{^{\nu^*(u)}u : u \in U\right\}$ $f$-kümesi elde edilir. Burada, $|E|$, $E$'nin kardinalitesini gösterir.

**Adım 3.** $d(u_k) = \frac{\nu^*(u_k)}{\max_i \nu^*(u_i)}$ olacak biçimde bir $\left\{^{d(u_k)}u_k | u_k \in U\right\}$ karar kümesi elde edilir.

**Not 2.55.** Karar kümesi bir $f$-küme olan algoritmalarda optimum alternatifler en büyük üyelik derecesine sahip alternatifler olarak belirlenir.

**Not 2.56.** Bu çalışmada önerilen esnek karar verme metodunda alternatiflerin kümesi üzerinde bir aralık değerli bulanık küme olan karar kümelerinden optimum elemanları seçebilmek için Xu ve Yager (2006) tarafından tanıtılan tam sıralama bağıntısı kullanılmaktadır.

**Tanım 2.57.** (Xu ve Yager, 2006) $\gamma_1, \gamma_2 \in Int([0,1])$ olsun. O halde,

$$\gamma_1 \leq_{XY} \gamma_2 \Leftrightarrow \left[ \left(\gamma_1^- + \gamma_1^+ < \gamma_2^- + \gamma_2^+\right) \vee \left(\gamma_1^- + \gamma_1^+ = \gamma_2^- + \gamma_2^+ \wedge \gamma_1^+ - \gamma_1^- \leq \gamma_2^+ - \gamma_2^-\right) \right]$$

biçimindedir.

**Önerme 2.58.** "$\leq_{XY}$" bağıntısı $Int([0,1])$ kümesi üzerinde bir tam sıralama bağıntısıdır.

# BÖLÜM 3
# ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK PARAMETRELİ ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK ESNEK KÜMELER

Bu bölümde, aralık değerli sezgisel bulanık parametreli aralık değerli sezgisel bulanık esnek küme kavramı tanımlandı ve bu kavramın bazı temel özellikleri incelendi (Aydın ve Enginoğlu, 2020). Bu bölümün temel amacı, esnek küme (Molodtsov, 1999) ve *ivif*-küme (Atanassov ve Gargov, 1989) kavramlarına teorik olarak bir katkı yapmaktır.

**Tanım 3.1.** $U$ bir evrensel küme, $E$ parametrelerin bir kümesi, $\kappa \in IVIF(E)$ ve $f$, $\kappa$'dan $IVIF(U)$ kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. O halde, $f$'nin grafiği olan $\left\{ \left( {}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, f({}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x) \right) : x \in E \right\}$ kümesine $U$ üzerinde $E$ yoluyla parametrize edilmiş (kısaca $U$ üzerinde) bir aralık değerli sezgisel bulanık parametreli aralık değerli sezgisel bulanık esnek küme ($d$-küme) denir.

$f$ fonksiyonu ile $f$'nin grafiği olan $\text{graf}(f) := \left\{ \left( {}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, f({}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x) \right) : x \in E \right\}$ kümesinden herhangi biri verildiğinde diğeri tek türlü olarak belirlenebildiği için $\text{graf}(f)$ ve $f$ notasyonları birbirlerinin yerine kullanılabilir. Bu nedenle, herhangi bir karışıklığa neden olmadığı sürece, bir $d$-küme $f$ ile gösterilecektir. Bu çalışma boyunca, $U$ üzerindeki tüm $d$-kümelerin kümesi $D_E(U)$ ile gösterilmektedir.

**Not 3.2.** Yazımda kolaylık sağlaması açısından, bir karışıklığa neden olmadığı sürece, $({}^{0}_{1}x, 0_U)$ biçimindeki elemanlar bir $d$-kümede gösterilmeyebilir. Burada, $0_U$, $U$ üzerinde boş *ivif*-kümedir.

**Örnek 3.3.** $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ bir parametre kümesi ve $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ bir evrensel küme olmak üzere

$$\kappa = \left\{ {}^{[0.2,0.5]}_{[0.3,0.4]}x_1, {}^{[0.3,0.4]}_{[0.1,0.3]}x_2, {}^{1}_{0}x_4 \right\},$$

$$f\left( {}^{[0.2,0.5]}_{[0.3,0.4]}x_1 \right) = \left\{ {}^{[0.1,0.3]}_{[0.2,0.6]}u_2, {}^{[0.8,0.9]}_{[0,0.1]}u_3 \right\}, \; f\left( {}^{[0.3,0.4]}_{[0.1,0.3]}x_2 \right) = 0_U, f({}^{0}_{1}x_3) = 0_U \text{ ve } f({}^{1}_{0}x_4) = \{{}^{0.7}_{0.2}u_5\}$$

olsun. O halde,

$$f = \left\{ \left( {}^{[0.2,0.5]}_{[0.3,0.4]}x_1, \left\{ {}^{[0.1,0.3]}_{[0.2,0.6]}u_2, {}^{[0.8,0.9]}_{[0,0.1]}u_3 \right\} \right), \left( {}^{[0.3,0.4]}_{[0.1,0.3]}x_2, 0_U \right), \left( {}^{1}_{0}x_4, \{{}^{0.7}_{0.2}u_5\} \right) \right\}$$

$U$ üzerinde bir $d$-kümedir.

**Tanım 3.4.** $f \in D_E(U)$ olsun. Eğer $\kappa = 0_E$ ve her $x \in E$ için, $f({}^{0}_{1}x) = 0_U$ oluyorsa, $f$'ye boş $d$-küme denir ve $\tilde{0}$ ile gösterilir.

Diğer bir ifadeyle, $\tilde{0} := \left\{ \left( {}^{0}_{1}x, 0_U \right) : x \in E \right\}$ biçimindedir.

**Tanım 3.5.** $f \in D_E(U)$ olsun. Eğer $\kappa = 1_E$ ve her $x \in E$ için, $f({}^1_0x) = 1_U$ oluyorsa, $f$'ye evrensel $d$-küme denir ve $\tilde{1}$ ile gösterilir.

Diğer bir ifadeyle, $\tilde{1} := \left\{ \left({}^1_0x, 1_U\right) : x \in E \right\}$ biçimindedir.

Bazı karar verme problemlerinde, $f \in D_E(U)$ için parametrelerin veya alternatiflerin değerlerinin bir kısmının gözardı edilmesi, çözüm için gerekli veya kolaylaştırıcı bir yol olabilir. Ancak bu gözardı etme, fonksiyonlarda bilinen kısıtlanış tanımı yoluyla yapılmak istendiğinde $U$ kümesi, $E$ kümesi üzerinde tanımlı bir $ivif$-küme yoluyla parametrize edilemez. Bu nedenle, $f$'nin kısıtlanışının da $D_E(U)$ kümesinin bir elemanı olması için kısıtlanış tanımı aşağıdaki gibi verildi.

**Tanım 3.6.** $f, f_1 \in D_E(U)$ ve $A \subseteq E$ olsun. O halde,

$$\alpha_{A\kappa_1}(x) := \begin{cases} \alpha(x), & x \in A \\ \alpha_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases} \quad \text{ve} \quad \beta_{A\kappa_1}(x) := \begin{cases} \beta(x), & x \in A \\ \beta_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

olmak üzere,

$$f_{Af_1}\left({}^{\alpha_{A\kappa_1}(x)}_{\beta_{A\kappa_1}(x)}x\right) := \begin{cases} f({}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x), & x \in A \\ f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

ile tanımlı bir $d$-kümeye $f$'nin $Af_1$-kısıtlanışı denir ve $f_{Af_1}$ ile gösterilir.

**Örnek 3.7.** Örnek 3.3'de verilen $U$, $E$ ve $f$ göz önüne alınsın. Ayrıca, $A = \{x_1, x_3\}$ ve $f_1 = \left\{ \left({}^{[0.1,0.6]}_{[0.2,0.3]}x_2, \left\{{}^{[0.7,0.8]}_{[0,0.1]}u_3, {}^{[0.5,0.7]}_{[0,0.1]}u_4\right\}\right), \left({}^{[0.1,0.3]}_{[0.2,0.4]}x_3, 1_U\right), \left({}^1_0x_4, \left\{{}^{[0.3,0.8]}_{[0.1,0.2]}u_1, {}^{[0.1,0.2]}_{[0,0.4]}u_2\right\}\right) \right\}$ olsun. O halde, $f$ in $Af_1$-kısıtlanışı

$$\begin{aligned} f_{Af_1} = & \left\{ \left({}^{[0.2,0.5]}_{[0.3,0.4]}x_1, \left\{{}^{[0.1,0.3]}_{[0.2,0.6]}u_2, {}^{[0.8,0.9]}_{[0,0.1]}u_3\right\}\right), \left({}^{[0.1,0.6]}_{[0.2,0.3]}x_2, \left\{{}^{[0.7,0.8]}_{[0,0.1]}u_3, {}^{[0.5,0.7]}_{[0,0.1]}u_4\right\}\right), \right. \\ & \left. \left({}^1_0x_4, \left\{{}^{[0.3,0.8]}_{[0.1,0.2]}u_1, {}^{[0.1,0.2]}_{[0,0.4]}u_2\right\}\right) \right\} \end{aligned}$$

biçimindedir.

**Tanım 3.8.** $f_1, f_2 \in D_E(U)$ olsun. Eğer $\kappa_1 \tilde{\subseteq} \kappa_2$ ve her $x \in E$ için, $f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x) \tilde{\subseteq} f_2({}^{\alpha_2(x)}_{\beta_2(x)}x)$ oluyorsa, $f_1$'e $f_2$'nin bir alt kümesi denir ve $f_1 \tilde{\subseteq} f_2$ ile gösterilir.

**Önerme 3.9.** $f, f_1, f_2, f_3 \in D_E(U)$ olsun. O halde,

*i.* $f \tilde{\subseteq} \tilde{1}$

*ii.* $\tilde{0} \tilde{\subseteq} f$

*iii.* $f \tilde{\subseteq} f$

*iv.* $[f_1 \tilde{\subseteq} f_2 \wedge f_2 \tilde{\subseteq} f_3] \Rightarrow f_1 \tilde{\subseteq} f_3$

biçimindedir.

**Yorum 3.10.** $d$-kümelerde kapsama tanımı gereğince, $f_1\tilde{\subseteq}f_2$ olması $f_1$'in her elemanının $f_2$'nin bir elemanı olmasını gerektirmez. Örneğin, $E=\{x_1,x_2,x_3\}$ bir parametre kümesi ve $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ bir evrensel küme olmak üzere

$$\begin{aligned} f_1 = \; & \Big\{ \Big( \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.1,0.7]}{[0.2,0.3]}x_1, \Big\{ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.4]}{[0.2,0.5]}u_1, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.4]}{[0,0.1]}u_2, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.2]}{[0.5,0.6]}u_3 \Big\} \Big), \Big( \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2,0.3]}{[0.4,0.5]}x_2, \Big\{ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.1,0.3]}{[0.4,0.5]}u_1, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.1]}{[0.3,0.9]}u_2, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.4]}{[0.4,0.6]}u_3 \Big\} \Big), \\ & \Big( \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.5,0.8]}{[0.1,0.2]}x_3, \Big\{ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2,0.3]}{[0.2,0.6]}u_1, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.4]}{[0.4,0.6]}u_2, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2,0.3]}{[0.4,0.7]}u_3 \Big\} \Big) \Big\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_2 = \; & \Big\{ \Big( \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2,0.8]}{[0.1,0.2]}x_1, \Big\{ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.4,0.5]}{[0,0.3]}u_1, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.5,0.8]}{[0,0.1]}u_2, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2,0.4]}{[0.3,0.5]}u_3 \Big\} \Big), \Big( \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.4]}{[0.2,0.5]}x_2, \Big\{ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2,0.4]}{[0.2,0.5]}u_1, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.1]}{[0,0.9]}u_2, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.4,0.5]}{[0.3,0.4]}u_3 \Big\} \Big), \\ & \Big( \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.7,0.8]}{[0,0.1]}x_3, \Big\{ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.4]}{[0.1,0.5]}u_1, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.6,0.8]}{[0,0.1]}u_2, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.4,0.5]}{[0.1,0.3]}u_3 \Big\} \Big) \Big\} \end{aligned}$$

verilsin. O halde, $\kappa_1\tilde{\subseteq}\kappa_2$ ve her $x\in E$ için, $f_1(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x)\tilde{\subseteq}f_2(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}x)$ olduğundan $f_1\tilde{\subseteq}f_2$ elde edilir. Diğer taraftan, $\Big( \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.1,0.7]}{[0.2,0.3]}x_1, \Big\{ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.4]}{[0.2,0.5]}u_1, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.4]}{[0,0.1]}u_2, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.2]}{[0.5,0.6]}u_3 \Big\} \Big) \in f_1$ olmasına rağmen $\Big( \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.1,0.7]}{[0.2,0.3]}x_1, \Big\{ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.4]}{[0.2,0.5]}u_1, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.4]}{[0,0.1]}u_2, \genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.2]}{[0.5,0.6]}u_3 \Big\} \Big) \notin f_2$ olduğundan $f_1 \nsubseteq f_2$ biçimindedir.

**Tanım 3.11.** $f_1,f_2\in D_E(U)$ olsun. Eğer $\kappa_1=\kappa_2$ ve her $x\in E$ için, $f_1(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x)=f_2(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}x)$ oluyorsa, $f_1$ ve $f_2$'ye eşit $d$-kümeler denir ve $f_1=f_2$ ile gösterilir.

**Önerme 3.12.** $f_1,f_2,f_3\in D_E(U)$ olsun. O halde,

*i.* $[f_1=f_2\wedge f_2=f_3]\Rightarrow f_1=f_3$

*ii.* $[f_1\tilde{\subseteq}f_2\wedge f_2\tilde{\subseteq}f_1]\Leftrightarrow f_1=f_2$

biçimindedir.

**Tanım 3.13.** $f_1,f_2\in D_E(U)$ olsun. Eğer $f_1\tilde{\subseteq}f_2$ ve $f_1\neq f_2$ oluyorsa, $f_1$'e $f_2$'nin bir öz alt kümesi denir ve $f_1\tilde{\subsetneq}f_2$ ile gösterilir.

**Tanım 3.14.** $f_1,f_2,f_3\in D_E(U)$ olsun. Eğer $\kappa_3=\kappa_1\tilde{\cup}\kappa_2$ ve her $x\in E$ için, $f_3(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha_3(x)}{\beta_3(x)}x)=f_1(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x)\tilde{\cup}f_2(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}x)$ oluyorsa, $f_3$'e $f_1$ ile $f_2$'nin birleşimi denir ve $f_1\tilde{\cup}f_2$ ile gösterilir.

**Önerme 3.15.** $f,f_1,f_2,f_3\in D_E(U)$ olsun. O halde,

*i.* $f\tilde{\cup}f=f$

*ii.* $f\tilde{\cup}\tilde{0}=f$

*iii.* $f\tilde{\cup}\tilde{1}=\tilde{1}$

*iv.* $f_1\tilde{\cup}f_2=f_2\tilde{\cup}f_1$

*v.* $(f_1\tilde{\cup}f_2)\tilde{\cup}f_3=f_1\tilde{\cup}(f_2\tilde{\cup}f_3)$

*vi.* $[f_1\tilde{\subseteq}f_2\Rightarrow f_1\tilde{\cup}f_2=f_2]$

biçimindedir.

**Tanım 3.16.** $f_1,f_2,f_3\in D_E(U)$ olsun. Eğer $\kappa_3=\kappa_1\tilde{\cap}\kappa_2$ ve her $x\in E$ için, $f_3(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha_3(x)}{\beta_3(x)}x)=f_1(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x)\tilde{\cap}f_2(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}x)$ oluyorsa, $f_3$'e $f_1$ ile $f_2$'nin kesişimi denir ve $f_1\tilde{\cap}f_2$ ile gösterilir.

**Önerme 3.17.** $f, f_1, f_2, f_3 \in D_E(U)$ olsun. O halde,

*i.* $f \tilde{\cap} f = f$

*ii.* $f \tilde{\cap} \tilde{1} = f$

*iii.* $f \tilde{\cap} \tilde{0} = \tilde{0}$

*iv.* $f_1 \tilde{\cap} f_2 = f_2 \tilde{\cap} f_1$

*v.* $(f_1 \tilde{\cap} f_2) \tilde{\cap} f_3 = f_1 \tilde{\cap} (f_2 \tilde{\cap} f_3)$

*vi.* $[f_1 \tilde{\subseteq} f_2 \Rightarrow f_1 \tilde{\cap} f_2 = f_1]$

biçimindedir.

**Önerme 3.18.** $f_1, f_2, f_3 \in D_E(U)$ olsun. O halde,

*i.* $f_1 \tilde{\cup} (f_2 \tilde{\cap} f_3) = (f_1 \tilde{\cup} f_2) \tilde{\cap} (f_1 \tilde{\cup} f_3)$

*ii.* $f_1 \tilde{\cap} (f_2 \tilde{\cup} f_3) = (f_1 \tilde{\cap} f_2) \tilde{\cup} (f_1 \tilde{\cap} f_3)$

biçimindedir.

**Tanım 3.19.** $f_1, f_2, f_3 \in D_E(U)$ olsun. Eğer $\kappa_3 = \kappa_1 \tilde{\setminus} \kappa_2$ ve her $x \in E$ için, $f_3(\binom{\alpha_3(x)}{\beta_3(x)}x) = f_1(\binom{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x) \tilde{\setminus} f_2(\binom{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}x)$ oluyorsa, $f_3$'e $f_1$ ile $f_2$'nin farkı denir ve $f_1 \tilde{\setminus} f_2$ ile gösterilir.

**Önerme 3.20.** $f \in D_E(U)$ olsun. O halde,

*i.* $f \tilde{\setminus} \tilde{0} = f$

*ii.* $f \tilde{\setminus} \tilde{1} = \tilde{0}$

*iii.* $\tilde{0} \tilde{\setminus} f = \tilde{0}$

biçimindedir.

**Not 3.21.** $d$-kümelerde fark işlemi değişme ve birleşme özelliklerini sağlamaz.

**Tanım 3.22.** $f_1, f_2 \in D_E(U)$ olsun. Eğer $\kappa_2 = \kappa_1^{\tilde{c}}$ ve her $x \in E$ için, $f_2(\binom{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)}x) = f_1^{\tilde{c}}(\binom{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)}x)$ oluyorsa, $f_2$'ye $f_1$'in tümleyeni denir ve $f_1^{\tilde{c}}$ ile gösterilir. Burada, her $x \in E$ için, $f_1^{\tilde{c}}(\binom{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)}x) = (f_1(\binom{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x))^{\tilde{c}}$ biçimindedir.

Diğer bir ifadeyle, $f_1^{\tilde{c}} = \tilde{1} \tilde{\setminus} f_1$ biçimindedir.

**Önerme 3.23.** $f, f_1, f_2 \in D_E(U)$ olsun. O halde,

*i.* $(f^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = f$

*ii.* $\tilde{0}^{\tilde{c}} = \tilde{1}$

*iii.* $f_1 \tilde{\setminus} f_2 = f_1 \tilde{\cap} f_2^{\tilde{c}}$

*vi.* $f_1 \tilde{\subseteq} f_2 \Rightarrow f_2^{\tilde{c}} \tilde{\subseteq} f_1^{\tilde{c}}$

biçimindedir.

**Önerme 3.24.** $f_1, f_2 \in D_E(U)$ olsun. O halde, aşağıdaki De Morgan kuralları sağlanır.

*i.* $(f_1 \tilde{\cup} f_2)^{\tilde{c}} = f_1^{\tilde{c}} \tilde{\cap} f_2^{\tilde{c}}$

*ii.* $(f_1 \tilde{\cap} f_2)^{\tilde{c}} = f_1^{\tilde{c}} \tilde{\cup} f_2^{\tilde{c}}$

**Tanım 3.25.** $f_1, f_2, f_3 \in D_E(U)$ olsun. Eğer $\kappa_3 = \kappa_1 \tilde{\triangle} \kappa_2$ ve her $x \in E$ için, $f_3({}^{\alpha_3(x)}_{\beta_3(x)}x) = f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x) \tilde{\triangle} f_2({}^{\alpha_2(x)}_{\beta_2(x)}x)$ oluyorsa, $f_3$'e $f_1$ ile $f_2$'nin simetrik farkı denir ve $f_1 \tilde{\triangle} f_2$ ile gösterilir.

**Önerme 3.26.** $f, f_1, f_2 \in D_E(U)$ olsun. O halde,

*i.* $f \tilde{\triangle} \tilde{0} = f$

*ii.* $f \tilde{\triangle} \tilde{1} = f^{\tilde{c}}$

*iii.* $f_1 \tilde{\triangle} f_2 = f_2 \tilde{\triangle} f_1$

biçimindedir.

**Not 3.27.** $d$-kümelerde simetrik fark işlemi birleşme özelliğini sağlamaz.

**Tanım 3.28.** $f_1, f_2 \in D_E(U)$ olsun. Eğer $f_1 \tilde{\cap} f_2 = \tilde{0}$ oluyorsa, $f_1$ ile $f_2$'ye ayrık $d$-kümeler denir.

**Örnek 3.29.** $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ bir parametre kümesi, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ bir evrensel küme olmak üzere

$$f_1 = \Big\{ \Big({}^{[0.1,0.5]}_{[0.2,0.3]}x_1, \Big\{{}^{1}_{0}u_2, {}^{[0,0.1]}_{[0.5,0.6]}u_3, {}^{[0,0.1]}_{[0.5,0.7]}u_4\Big\}\Big), \Big({}^{1}_{0}x_2, \Big\{{}^{[0.2,0.4]}_{[0.2,0.5]}u_1, {}^{[0,0.1]}_{[0,0.5]}u_2, {}^{[0.4,0.5]}_{[0.3,0.4]}u_3, {}^{[0.5,0.6]}_{[0.1,0.3]}u_4\Big\}\Big), \Big({}^{[0.3,0.4]}_{[0,0.1]}x_3, \Big\{{}^{[0.3,0.4]}_{[0.1,0.5]}u_1, {}^{[0,0.7]}_{[0.1,0.2]}u_3\Big\}\Big)\Big\}$$

ve

$$f_2 = \Big\{ \Big({}^{[0.2,0.3]}_{[0,0.5]}x_2, \Big\{{}^{[0.1,0.2]}_{[0.4,0.5]}u_1, {}^{[0.3,0.7]}_{[0.1,0.2]}u_2, {}^{[0.3,0.4]}_{[0.4,0.6]}u_3\Big\}\Big), \Big({}^{[0.3,0.8]}_{[0,0.1]}x_3, \Big\{{}^{1}_{0}u_1, {}^{[0.2,0.3]}_{[0,0.4]}u_3, {}^{[0.1,0.4]}_{[0.5,0.6]}u_4\Big\}\Big)\Big\}$$

verilsin. O halde,

$$f_1 \tilde{\cup} f_2 = \Big\{ \Big({}^{[0.1,0.5]}_{[0.2,0.3]}x_1, \Big\{{}^{1}_{0}u_2, {}^{[0,0.1]}_{[0.5,0.6]}u_3, {}^{[0,0.1]}_{[0.5,0.7]}u_4\Big\}\Big), \Big({}^{1}_{0}x_2, \Big\{{}^{[0.2,0.4]}_{[0.2,0.5]}u_1, {}^{[0.3,0.7]}_{[0,0.2]}u_2, {}^{[0.4,0.5]}_{[0.3,0.4]}u_3, {}^{[0.5,0.6]}_{[0.1,0.3]}u_4\Big\}\Big), \Big({}^{[0.3,0.8]}_{[0,0.1]}x_3, \Big\{{}^{1}_{0}u_1, {}^{[0.2,0.7]}_{[0,0.2]}u_3, {}^{[0.1,0.4]}_{[0.5,0.6]}u_4\Big\}\Big)\Big\},$$

$$f_1 \tilde{\cap} f_2 = \Big\{ \Big({}^{[0.2,0.3]}_{[0,0.5]}x_2, \Big\{{}^{[0.1,0.2]}_{[0.4,0.5]}u_1, {}^{[0,0.1]}_{[0.1,0.5]}u_2, {}^{[0.3,0.4]}_{[0.4,0.6]}u_3\Big\}\Big), \Big({}^{[0.3,0.4]}_{[0,0.1]}x_3, \Big\{{}^{[0.3,0.4]}_{[0.1,0.5]}u_1, {}^{[0,0.3]}_{[0.1,0.4]}u_3\Big\}\Big)\Big\},$$

$$f_1 \tilde{\setminus} f_2 = \Big\{ \Big({}^{[0.1,0.5]}_{[0.2,0.3]}x_1, \Big\{{}^{1}_{0}u_2, {}^{[0,0.1]}_{[0.5,0.6]}u_3, {}^{[0,0.1]}_{[0.5,0.7]}u_4\Big\}\Big), \Big({}^{[0,0.5]}_{[0.2,0.3]}x_2, \Big\{{}^{[0.2,0.4]}_{[0.2,0.5]}u_1, {}^{[0,0.1]}_{[0.3,0.7]}u_2, {}^{[0.4,0.5]}_{[0.3,0.4]}u_3, {}^{[0.5,0.6]}_{[0.1,0.3]}u_4\Big\}\Big), \Big({}^{[0,0.1]}_{[0.3,0.8]}x_3, \Big\{{}^{[0,0.4]}_{[0.2,0.3]}u_3\Big\}\Big)\Big\},$$

$$f_1^{\tilde{c}} = \Big\{ \Big({}^{[0.2,0.3]}_{[0.1,0.5]}x_1, \Big\{{}^{1}_{0}u_1, {}^{[0.5,0.6]}_{[0,0.1]}u_3, {}^{[0.5,0.7]}_{[0,0.1]}u_4\Big\}\Big), \Big({}^{0}_{1}x_2, \Big\{{}^{[0.2,0.5]}_{[0.2,0.4]}u_1, {}^{[0,0.5]}_{[0,0.1]}u_2, {}^{[0.3,0.4]}_{[0.4,0.5]}u_3, {}^{[0.1,0.3]}_{[0.5,0.6]}u_4\Big\}\Big), \Big({}^{[0,0.1]}_{[0.3,0.4]}x_3, \Big\{{}^{[0.1,0.5]}_{[0.3,0.4]}u_1, {}^{1}_{0}u_2, {}^{[0.1,0.2]}_{[0,0.7]}u_3, {}^{1}_{0}u_4\Big\}\Big)\Big\}$$

ve

$$f_1 \tilde{\triangle} f_2 = \Big\{ \Big({}^{[0.1,0.5]}_{[0.2,0.3]}x_1, \Big\{{}^{1}_{0}u_2, {}^{[0,0.1]}_{[0.5,0.6]}u_3, {}^{[0,0.1]}_{[0.5,0.7]}u_4\Big\}\Big), \Big({}^{[0,0.5]}_{[0.2,0.3]}x_2, \Big\{{}^{[0.2,0.4]}_{[0.2,0.5]}u_1, {}^{[0,0.5]}_{[0.1,0.2]}u_2, {}^{[0.4,0.5]}_{[0.3,0.4]}u_3, {}^{[0.5,0.6]}_{[0.1,0.3]}u_4\Big\}\Big), \Big({}^{[0,0.1]}_{[0.3,0.4]}x_3, \Big\{{}^{[0.1,0.5]}_{[0.3,0.4]}u_1, {}^{[0.1,0.4]}_{[0,0.3]}u_3, {}^{[0.1,0.4]}_{[0.5,0.6]}u_4\Big\}\Big)\Big\}$$

olarak elde edilir.

**Tanım 3.30.** $f_1, f_2 \in D_E(U)$ ve $A \subseteq E$ olsun. O halde,

$$\alpha_3(x) := \begin{cases} \sup\left\{\alpha_1(x), \inf_{y\in A}\{\alpha_2(y)\}\right\}, & x \in A \\ \alpha_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

ve

$$\beta_3(x) := \begin{cases} \inf\left\{\beta_1(x), \sup_{y\in A}\{\beta_2(y)\}\right\}, & x \in A \\ \beta_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

olmak üzere,

$$f_3(^{\alpha_3(x)}_{\beta_3(x)}x) := \begin{cases} f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\tilde{\cup}\left(\tilde{\bigcap}_{y\in A} f_2(^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)}y)\right), & x \in A \\ f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

ile tanımlı $f_3 \in D_E(U)$'e $f_1$ ile $f_2$'nin $A$-bağıl birleşimi denir ve $f_1\tilde{\cup}^r_A f_2$ ile gösterilir.

Özel olarak, $f_1$ ile $f_2$'nin $E$-bağıl birleşimine bağıl birleşim denir ve $f_1\tilde{\cup}^r f_2$ ile gösterilir.

**Önerme 3.31.** $f, f_1, f_2, f_3 \in D_E(U)$ olsun. O halde,

*i.* $f\tilde{\cup}^r_A f = f$

*ii.* $f\tilde{\cup}^r_A \tilde{0} = f$

*iii.* $\tilde{1}\tilde{\cup}^r_A f = \tilde{1}$

*vi.* $(f_1\tilde{\cup}^r_A f_2)\tilde{\cup}^r_A f_3 = f_1\tilde{\cup}^r_A (f_2\tilde{\cup}^r_A f_3)$

biçimindedir.

KANIT.

*i.* $f = \left\{\left(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)\right) : x \in E\right\}$, $f_1 = \left\{\left(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x, f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\right) : x \in E\right\}$ ve $f\tilde{\cup}^r_A f = f_1$ olsun.

*1. Durum:* $x \in A$ olsun.

i. $\inf_{y\in A}\{\alpha(y)\} = \alpha(x)$ olsun. O halde, $\alpha_1(x) = \sup\left\{\alpha(x), \inf_{y\in A}\{\alpha(y)\}\right\} = \alpha(x)$ elde edilir.

ii. $\inf_{y\in A}\{\alpha(y)\} \neq \alpha(x)$ olsun. O halde, $\inf_{y\in A}\{\alpha(y)\} \tilde{\leq} \alpha(x)$ olduğundan $\alpha_1(x) = \sup\left\{\alpha(x), \inf_{y\in A}\{\alpha(y)\}\right\} = \alpha(x)$ elde edilir.

iii. $\sup_{y\in A}\{\beta(y)\} = \beta(x)$ olsun. O halde, $\beta_1(x) = \inf\left\{\beta(x), \sup_{y\in A}\{\beta(y)\}\right\} = \beta(x)$ elde edilir.

iv. $\sup_{y\in A}\{\beta(y)\} \neq \beta(x)$ olsun. O halde, $\beta(x) \tilde{\leq} \sup_{y\in A}\{\beta(y)\}$ olduğundan $\beta_1(x) = \inf\left\{\beta(x), \sup_{y\in A}\{\beta(y)\}\right\} = \beta(x)$ elde edilir.

v. $\left(\tilde{\bigcap}_{y\in A} f(^{\alpha(y)}_{\beta(y)}y)\right) = f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)$ olsun. O halde, $f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x) = f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)\tilde{\cup}\left(\tilde{\bigcap}_{y\in A} f(^{\alpha(y)}_{\beta(y)}y)\right) = f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)$ elde edilir.

vi. $\left(\tilde{\bigcap}_{y\in A} f(^{\alpha(y)}_{\beta(y)}y)\right) \neq f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)$ olsun. O halde, $\left(\tilde{\bigcap}_{y\in A} f(^{\alpha(y)}_{\beta(y)}y)\right) \tilde{\subseteq} f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)$ olduğundan $f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x) = f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x) \tilde{\cup} \left(\tilde{\bigcap}_{y\in A} f(^{\alpha(y)}_{\beta(y)}y)\right) = f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)$ elde edilir.

*2. Durum:* $x \notin A$ olsun.

O halde, $\alpha_1(x) = \alpha(x)$, $\beta_1(x) = \beta(x)$ ve $f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x) = f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)$ elde edilir.

Dolayısıyla, her $x \in E$ için,

$$\alpha_1(x) = \begin{cases} \sup\left\{\alpha(x), \inf_{y\in A}\{\alpha(y)\}\right\}, & x \in A \\ \alpha(x), & x \in E \setminus A \end{cases} = \alpha(x)$$

$$\beta_1(x) = \begin{cases} \inf\left\{\beta(x), \sup_{y\in A}\{\beta(y)\}\right\}, & x \in A \\ \beta(x), & x \in E \setminus A \end{cases} = \beta(x)$$

ve

$$f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x) = \begin{cases} f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x) \tilde{\cup} \left(\tilde{\bigcap}_{y\in A} f(^{\alpha(y)}_{\beta(y)}y)\right), & x \in A \\ f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x), & x \in E \setminus A \end{cases} = f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)$$

biçimindedir. O halde, $f_1 = f$ olduğundan $f \tilde{\cup}^r_A f = f$ elde edilir.

*ii.* Her $x \in E$ için, $\tilde{\alpha}(x) = 0$, $\tilde{\beta}(x) = 1$ ve $\tilde{0}(^{\tilde{\alpha}(x)}_{\tilde{\beta}(x)}x) = 0_U$ olduğundan

$$\begin{aligned}
f \tilde{\cup}^r_A \tilde{0} &= \left\{\left(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)\right) : x \in E\right\} \tilde{\cup}^r_A \left\{\left(^{\tilde{\alpha}(x)}_{\tilde{\beta}(x)}x, \tilde{0}(^{\tilde{\alpha}(x)}_{\tilde{\beta}(x)}x)\right) : x \in E\right\} \\
&= \begin{cases} \left(^{\sup\left\{\alpha(x), \inf_{y\in A}\{\tilde{\alpha}(y)\}\right\}}_{\inf\left\{\beta(x), \sup_{y\in A}\{\tilde{\beta}(y)\}\right\}}x, f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x) \tilde{\cup} \left(\tilde{\bigcap}_{y\in A} \tilde{0}(^{\tilde{\alpha}(y)}_{\tilde{\beta}(y)}y)\right)\right), & x \in A \\ \left(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)\right), & x \in E \setminus A \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(^{\sup\{\alpha(x),0\}}_{\inf\{\beta(x),1\}}x, f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x) \tilde{\cup} 0_U\right), & x \in A \\ \left(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)\right), & x \in E \setminus A \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)\right), & x \in A \\ \left(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)\right), & x \in E \setminus A \end{cases} \\
&= \left\{\left(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, f(^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)\right) : x \in E\right\} \\
&= f
\end{aligned}$$

elde edilir.

*iii.*

$$
\begin{aligned}
\tilde{1}\tilde{\cup}^r_A f &= \left\{\left({}^1_0x, 1_U\right) : x\in E\right\}\tilde{\cup}^r_A\left\{\left({}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, f({}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x)\right) : x\in E\right\}\\
&= \begin{cases} \left({}^{\sup\{1,\inf_{y\in A}\{\alpha(y)\}\}}_{\inf\{0,\sup_{y\in A}\{\beta(y)\}\}}x, 1_U\tilde{\cup}\left(\tilde{\bigcap}_{y\in A} f({}^{\alpha(y)}_{\beta(y)}y)\right)\right), & x\in A\\ \left({}^1_0x, 1_U\right), & x\in E\setminus A\end{cases}\\
&= \begin{cases} \left({}^1_0x, 1_U\right), & x\in A\\ \left({}^1_0x, 1_U\right), & x\in E\setminus A\end{cases}\\
&= \left\{\left({}^1_0x, 1_U\right) : x\in E\right\}\\
&= \tilde{1}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

*iv.* $i\in\{1,2,3,4,5\}$ için, $f_i = \left\{\left({}^{\alpha_i(x)}_{\beta_i(x)}x, f_i({}^{\alpha_i(x)}_{\beta_i(x)}x)\right) : x\in E\right\}$ olmak üzere $f_1\tilde{\cup}^r_A(f_2\tilde{\cup}^r_A f_3) = f_4$, $(f_1\tilde{\cup}^r_A f_2)\tilde{\cup}^r_A f_3 = f_5$ ve $A = \{y_1, y_2, \ldots, y_s\ldots\}$ olsun. O halde, her $x\in E$ için,

$$
\begin{aligned}
\alpha_4(x) &= \begin{cases} \sup\{\alpha_1(x), \inf_{y\in A}\{\sup\{\alpha_2(y), \inf_{z\in A}\{\alpha_3(z)\}\}\}\}, & x\in A\\ \alpha_1(x), & x\in E\setminus A\end{cases}\\
&= \begin{cases} \sup\{\alpha_1(x), \inf\{\sup\{\alpha_2(y_1), \inf_{z\in A}\{\alpha_3(z)\}\}, \ldots, \sup\{\alpha_2(y_s), \inf_{z\in A}\{\alpha_3(z)\}\}, \ldots\}\}, & x\in A\\ \alpha_1(x), & x\in E\setminus A\end{cases}\\
&= \begin{cases} \sup\{\alpha_1(x), \sup\{\inf\{\alpha_2(y_1), \ldots, \alpha_2(y_s), \ldots\}, \inf_{z\in A}\{\alpha_3(z)\}\}\}, & x\in A\\ \alpha_1(x), & x\in E\setminus A\end{cases}\\
&= \begin{cases} \sup\{\alpha_1(x), \sup\{\inf_{y\in A}\{\alpha_2(y)\}, \inf_{z\in A}\{\alpha_3(z)\}\}\}, & x\in A\\ \alpha_1(x), & x\in E\setminus A\end{cases}\\
&= \begin{cases} \sup\{\sup\{\alpha_1(x), \inf_{y\in A}\{\alpha_2(y)\}\}, \inf_{z\in A}\{\alpha_3(z)\}\}, & x\in A\\ \alpha_1(x), & x\in E\setminus A\end{cases}\\
&= \alpha_5(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_4(x) &= \begin{cases} \inf\{\beta_1(x), \sup_{y\in A}\{\inf\{\beta_2(y), \sup_{z\in A}\{\beta_3(z)\}\}\}\}, & x\in A\\ \beta_1(x), & x\in E\setminus A\end{cases}\\
&= \begin{cases} \inf\{\beta_1(x), \sup\{\inf\{\beta_2(y_1), \sup_{z\in A}\{\beta_3(z)\}\}, \ldots, \inf\{\beta_2(y_s), \sup_{z\in A}\{\beta_3(z)\}\}, \ldots\}\}, & x\in A\\ \beta_1(x), & x\in E\setminus A\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{cases} \inf\{\beta_1(x), \inf\{\sup\{\beta_2(y_1), \dots, \beta_2(y_s), \dots\}, \sup_{z\in A}\{\beta_3(z)\}\}\}, & x \in A \\ \beta_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \inf\{\beta_1(x), \inf\{\sup_{y\in A}\{\beta_2(y)\}, \sup_{z\in A}\{\beta_3(z)\}\}\}, & x \in A \\ \beta_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \inf\{\inf\{\beta_1(x), \sup_{y\in A}\{\beta_2(y)\}\}, \sup_{z\in A}\{\beta_3(z)\}\}, & x \in A \\ \beta_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

$$= \beta_5(x)$$

ve

$$f_4({}^{\alpha_4(x)}_{\beta_4(x)}x) = \begin{cases} f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\tilde{\cup}\left(\tilde{\cap}_{y\in A}\left(f_2({}^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)}y)\tilde{\cup}\left(\tilde{\cap}_{z\in A}\ f_3({}^{\alpha_3(z)}_{\beta_3(z)}z)\right)\right)\right), & x \in A \\ f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\tilde{\cup}\left(\left(f_2({}^{\alpha_2(y_1)}_{\beta_2(y_1)}y_1)\tilde{\cup}\left(\tilde{\cap}_{z\in A}\ f_3({}^{\alpha_3(z)}_{\beta_3(z)}z)\right)\right)\tilde{\cap}\dots\tilde{\cap}\left(f_2({}^{\alpha_2(y_s)}_{\beta_2(y_s)}y_s)\tilde{\cup}\left(\tilde{\cap}_{z\in A}\ f_3({}^{\alpha_3(z)}_{\beta_3(z)}z)\right)\right)\tilde{\cap}\dots\right), & x \in A \\ f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\tilde{\cup}\left(\left(f_2({}^{\alpha_2(y_1)}_{\beta_2(y_1)}y_1)\tilde{\cap}\dots\tilde{\cap}f_2({}^{\alpha_2(y_s)}_{\beta_2(y_s)}y_s)\tilde{\cap}\dots\right)\tilde{\cup}\left(\tilde{\cap}_{z\in A}\ f_3({}^{\alpha_3(z)}_{\beta_3(z)}z)\right)\right), & x \in A \\ f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\tilde{\cup}\left(\left(\tilde{\cap}_{y\in A}f_2({}^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)}y)\right)\tilde{\cup}\left(\tilde{\cap}_{z\in A}\ f_3({}^{\alpha_3(z)}_{\beta_3(z)}z)\right)\right), & x \in A \\ f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\tilde{\cup}\left(\tilde{\cap}_{y\in A}f_2({}^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)}y)\right)\right)\tilde{\cup}\left(\tilde{\cap}_{z\in A}\ f_3({}^{\alpha_3(z)}_{\beta_3(z)}z)\right), & x \in A \\ f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

$$= f_5({}^{\alpha_5(x)}_{\beta_5(x)}x)$$

olduğundan $(f_1\tilde{\cup}^r_A f_2)\tilde{\cup}^r_A f_3 = f_1\tilde{\cup}^r_A(f_2\tilde{\cup}^r_A f_3)$ elde edilir. □

**Tanım 3.32.** $f_1, f_2 \in D_E(U)$ ve $A \subseteq E$ olsun. O halde,

$$\alpha_3(x) := \begin{cases} \inf\{\alpha_1(x), \sup_{y\in A}\{\alpha_2(y)\}\}, & x \in A \\ \alpha_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

ve

$$\beta_3(x) := \begin{cases} \sup\{\beta_1(x), \inf_{y\in A}\{\beta_2(y)\}\}, & x \in A \\ \beta_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

olmak üzere,

$$f_3({}^{\alpha_3(x)}_{\beta_3(x)}x) := \begin{cases} f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\tilde{\cap}\left(\tilde{\cup}_{y\in A}\ f_2({}^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)}y)\right), & x \in A \\ f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x), & x \in E \setminus A \end{cases}$$

ile tanımlı $f_3 \in D_E(U)$'e $f_1$ ile $f_2$'nin $A$-bağıl kesişimi denir ve $f_1 \tilde{\cap}_A^r f_2$ ile gösterilir.

Özel olarak, $f_1$ ile $f_2$'nin $E$-bağıl kesişimine bağıl kesişim denir ve $f_1 \tilde{\cap}^r f_2$ ile gösterilir.

**Önerme 3.33.** $f, f_1, f_2, f_3 \in D_E(U)$ olsun. O halde,

*i.* $f \tilde{\cap}_A^r f = f$

*ii.* $f \tilde{\cap}_A^r \tilde{1} = f$

*iii.* $\tilde{0} \tilde{\cap}_A^r f = \tilde{0}$

*iv.* $(f_1 \tilde{\cap}_A^r f_2) \tilde{\cap}_A^r f_3 = f_1 \tilde{\cap}_A^r (f_2 \tilde{\cap}_A^r f_3)$

biçimindedir.

KANIT. Önerme 3.31'in kanıtına benzer biçimde yapılabilir. □

**Önerme 3.34.** $f_1, f_2, f_3 \in D_E(U)$ olsun. O halde,

*i.* $(f_1 \tilde{\cap}_A^r f_2) \tilde{\cup}_A^r f_3 = (f_1 \tilde{\cup}_A^r f_3) \tilde{\cap}_A^r (f_2 \tilde{\cup}_A^r f_3)$

*ii.* $(f_1 \tilde{\cup}_A^r f_2) \tilde{\cap}_A^r f_3 = (f_1 \tilde{\cap}_A^r f_3) \tilde{\cup}_A^r (f_2 \tilde{\cap}_A^r f_3)$

biçimindedir.

KANIT.

*i.* $i \in \{1,2,3,4,5\}$ için, $f_i = \left\{ \left( {}^{\alpha_i(x)}_{\beta_i(x)} x, f_i({}^{\alpha_i(x)}_{\beta_i(x)} x) \right) : x \in E \right\}$ olmak üzere $(f_1 \tilde{\cap}_A^r f_2) \tilde{\cup}_A^r f_3 = f_4$ ve $(f_1 \tilde{\cup}_A^r f_3) \tilde{\cap}_A^r (f_2 \tilde{\cup}_A^r f_3) = f_5$ olsun. O halde, her $x \in E$ için,

$$
\begin{aligned}
\alpha_5(x) &= \begin{cases} \inf\{\sup\{\alpha_1(x), \inf_{z\in A}\{\alpha_3(z)\}\}, \sup_{y\in A}\{\sup\{\alpha_2(y), \inf_{z\in A}\{\alpha_3(z)\}\}\}\}, & x \in A \\ \alpha_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases} \\
&= \begin{cases} \inf\{\sup\{\alpha_1(x), \inf_{z\in A}\{\alpha_3(z)\}\}, \sup\{\sup_{y\in A}\{\alpha_2(y)\}, \inf_{z\in A}\{\alpha_3(z)\}\}\}, & x \in A \\ \alpha_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sup\{\inf\{\alpha_1(x), \sup_{y\in A}\{\alpha_2(y)\}\}, \inf_{z\in A}\{\alpha_3(z)\}\}, & x \in A \\ \alpha_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases} \\
&= \alpha_4(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_5(x) &= \begin{cases} \sup\{\inf\{\beta_1(x), \sup_{z\in A}\{\beta_3(z)\}\}, \inf_{y\in A}\{\inf\{\beta_2(y), \sup_{z\in A}\{\beta_3(z)\}\}\}\}, & x \in A \\ \beta_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sup\{\inf\{\beta_1(x), \sup_{z\in A}\{\beta_3(z)\}\}, \inf\{\inf_{y\in A}\{\beta_2(y)\}, \sup_{z\in A}\{\beta_3(z)\}\}\}, & x \in A \\ \beta_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases} \\
&= \begin{cases} \inf\{\sup\{\beta_1(x), \inf_{y\in A}\{\beta_2(y)\}\}, \sup_{z\in A}\{\beta_3(z)\}\}, & x \in A \\ \beta_1(x), & x \in E \setminus A \end{cases} \\
&= \beta_4(x)
\end{aligned}
$$

ve

$$f_5(^{\alpha_5(x)}_{\beta_5(x)}x) = \begin{cases} \left(f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\tilde{\cup}\left(\tilde{\cap}_{z\in A}\ f_3(^{\alpha_3(z)}_{\beta_3(z)}z)\right)\right)\tilde{\cap}\left(\tilde{\cup}_{y\in A}\left(f_2(^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)}y)\tilde{\cup}\left(\tilde{\cap}_{z\in A}\ f_3(^{\alpha_3(z)}_{\beta_3(z)}z)\right)\right)\right), & x\in A \\ f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x), & x\in E\setminus A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\tilde{\cup}\left(\tilde{\cap}_{z\in A}\ f_3(^{\alpha_3(z)}_{\beta_3(z)}z)\right)\right)\tilde{\cap}\left(\left(\tilde{\cup}_{y\in A} f_2(^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)}y)\right)\tilde{\cup}\left(\tilde{\cap}_{z\in A}\ f_3(^{\alpha_3(z)}_{\beta_3(z)}z)\right)\right), & x\in A \\ f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x), & x\in E\setminus A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\tilde{\cap}\left(\tilde{\cup}_{y\in A}\ f_2(^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)}y)\right)\right)\tilde{\cup}\left(\tilde{\cap}_{z\in A}\ f_3(^{\alpha_3(z)}_{\beta_3(z)}z)\right), & x\in A \\ f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x), & x\in E\setminus A \end{cases}$$

$$= f_4(^{\alpha_4(x)}_{\beta_4(x)}x)$$

olduğundan $(f_1\tilde{\cap}^r_A f_2)\tilde{\cup}^r_A f_3 = (f_1\tilde{\cup}^r_A f_3)\tilde{\cap}^r_A(f_2\tilde{\cup}^r_A f_3)$ elde edilir.

*ii.* *i.*'nin kanıtına benzer biçimde yapılabilir. □

**Tanım 3.35.** $f_1, f_2 \in D_E(U)$ ve $A \subseteq E$ olsun. O halde,

$$\alpha_3(x) := \begin{cases} \inf\{\alpha_1(x), \sup_{y\in A}\{\beta_2(y)\}\}, & x\in A \\ \alpha_1(x), & x\in E\setminus A \end{cases}$$

ve

$$\beta_3(x) := \begin{cases} \sup\{\beta_1(x), \inf_{y\in A}\{\alpha_2(y)\}\}, & x\in A \\ \beta_1(x), & x\in E\setminus A \end{cases}$$

olmak üzere,

$$f_3(^{\alpha_3(x)}_{\beta_3(x)}x) := \begin{cases} f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\tilde{\setminus}\left(\tilde{\cap}_{y\in A}\ f_2(^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)}y)\right), & x\in A \\ f_1(^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x), & x\in E\setminus A \end{cases}$$

ile tanımlı $f_3 \in D_E(U)$'e $f_1$ ile $f_2$'nin $A$-bağıl farkı denir ve $f_1\tilde{\setminus}^r_A f_2$ ile gösterilir.

Özel olarak, $f_1$ ile $f_2$'nin $E$-bağıl farkına bağıl fark denir ve $f_1\tilde{\setminus}^r f_2$ ile gösterilir.

**Önerme 3.36.** $f \in D_E(U)$ olsun. O halde,

*i.* $\tilde{0}\tilde{\setminus}^r_A f = \tilde{0}$

*ii.* $f\tilde{\setminus}^r_A \tilde{0} = f$

*iii.* $f\tilde{\setminus}^r_A \tilde{1} = \tilde{0}$

biçimindedir.

KANIT.

*i.* Her $x \in E$ için, $\tilde{\alpha}(x) = 0$, $\tilde{\beta}(x) = 1$ ve $\tilde{0}\left({}^{\tilde{\alpha}(x)}_{\tilde{\beta}(x)}x\right) = 0_U$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\tilde{0}\tilde{\setminus}^r_A f &= \left\{\left({}^{\tilde{\alpha}(x)}_{\tilde{\beta}(x)}x, \tilde{0}\left({}^{\tilde{\alpha}(x)}_{\tilde{\beta}(x)}x\right)\right) : x \in E\right\} \tilde{\setminus}^r_A \left\{\left({}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, f\left({}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x\right)\right) : x \in E\right\} \\
&= \begin{cases} \left({}^{\inf\left\{\tilde{\alpha}(x), \sup_{y\in A}\{\beta(y)\}\right\}}_{\sup\left\{\tilde{\beta}(x), \inf_{y\in A}\{\alpha(y)\}\right\}}x, \tilde{0}\left({}^{\tilde{\alpha}(x)}_{\tilde{\beta}(x)}x\right) \tilde{\setminus} \left(\tilde{\bigcap}_{y\in A} f\left({}^{\alpha(y)}_{\beta(y)}y\right)\right)\right), & x \in A \\ \left({}^{\tilde{\alpha}(x)}_{\tilde{\beta}(x)}x, \tilde{0}\left({}^{\tilde{\alpha}(x)}_{\tilde{\beta}(x)}x\right)\right), & x \in E \setminus A \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left({}^{\inf\left\{0, \sup_{y\in A}\{\beta(y)\}\right\}}_{\sup\left\{1, \inf_{y\in A}\{\alpha(y)\}\right\}}x, 0_U \tilde{\setminus} \left(\tilde{\bigcap}_{y\in A} f\left({}^{\alpha(y)}_{\beta(y)}y\right)\right)\right), & x \in A \\ \left({}^{0}_{1}x, 0_U\right), & x \in E \setminus A \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left({}^{0}_{1}x, 0_U\right), & x \in A \\ \left({}^{0}_{1}x, 0_U\right), & x \in E \setminus A \end{cases} \\
&= \left\{\left({}^{0}_{1}x, 0_U\right) : x \in E\right\} \\
&= \tilde{0}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Diğer eşitliklerin kanıtları da benzer biçimde yapılabilir. □

**Örnek 3.37.** Örnek 3.29'da verilen $f_1$ ve $f_2$ göz önüne alınsın ve $A = \{x_1, x_3\}$ olsun. O halde,

$$f_1 \tilde{\cup}^r_A f_2 = f_1,$$

$$
\begin{aligned}
f_1 \tilde{\cap}^r f_2 = & \left\{\left({}^{[0.1,0.5]}_{[0.2,0.3]}x_1, \left\{{}^{[0.3,0.7]}_{[0.1,0.2]}u_2, {}^{[0,0.1]}_{[0.5,0.6]}u_3, {}^{[0,0.1]}_{[0.5,0.7]}u_4\right\}\right), \left({}^{[0.3,0.8]}_{[0,0.1]}x_2, \left\{{}^{[0.2,0.4]}_{[0.2,0.5]}u_1, {}^{[0,0.1]}_{[0.1,0.5]}u_2, {}^{[0.3,0.4]}_{[0.3,0.4]}u_3, {}^{[0.1,0.4]}_{[0.5,0.6]}u_4\right\}\right),\right. \\
& \left.\left({}^{[0.3,0.4]}_{[0,0.1]}x_3, \left\{{}^{[0.3,0.4]}_{[0.1,0.5]}u_1, {}^{[0,0.4]}_{[0.1,0.4]}u_3\right\}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

ve

$$f_2 \tilde{\setminus}^r_A f_1 = \left\{\left({}^{[0.2,0.3]}_{[0,0.5]}x_2, \left\{{}^{[0.1,0.2]}_{[0.4,0.5]}u_1, {}^{[0.3,0.7]}_{[0.1,0.2]}u_2, {}^{[0.3,0.4]}_{[0.4,0.6]}u_3\right\}\right), \left({}^{[0.2,0.3]}_{[0.1,0.4]}x_3, \left\{{}^{1}_{0}u_1, {}^{[0.2,0.3]}_{[0,0.4]}u_3, {}^{[0.1,0.4]}_{[0.5,0.6]}u_4\right\}\right)\right\}$$

olarak elde edilir.

**Önerme 3.38.** $f_1, f_2 \in D_E(U)$ olsun. O halde, aşağıdaki De Morgan kuralları sağlanır.

*i.* $(f_1 \tilde{\cup}^r_A f_2)^{\tilde{c}} = f_1^{\tilde{c}} \tilde{\cap}^r_A f_2^{\tilde{c}}$

*ii.* $(f_1 \tilde{\cap}^r_A f_2)^{\tilde{c}} = f_1^{\tilde{c}} \tilde{\cup}^r_A f_2^{\tilde{c}}$

KANIT.

*i.* $f_1, f_2 \in D_E(U)$ olsun. O halde,

$$
\begin{aligned}
(f_1\tilde{\cup}^r_A f_2)^{\tilde{c}} &= \left(\left\{\left({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x, f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\right) : x\in E\right\}\tilde{\cup}^r_A\left\{\left({}^{\alpha_2(x)}_{\beta_2(x)}x, f_2({}^{\alpha_2(x)}_{\beta_2(x)}x)\right) : x\in E\right\}\right)^{\tilde{c}} \\
&= \left(\left\{\begin{array}{ll} \left({}^{\sup\{\alpha_1(x),\inf_{y\in A}\{\alpha_2(y)\}\}}_{\inf\{\beta_1(x),\sup_{y\in A}\{\beta_2(y)\}\}}x, f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\tilde{\cup}\left(\tilde{\bigcap}_{y\in A} f_2({}^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)}y)\right)\right), & x\in A \\ \left({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x, f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\right), & x\in E\setminus A \end{array}\right.\right)^{\tilde{c}} \\
&= \left\{\begin{array}{ll} \left({}^{\inf\{\beta_1(x),\sup_{y\in A}\{\beta_2(y)\}\}}_{\sup\{\alpha_1(x),\inf_{y\in A}\{\alpha_2(y)\}\}}x, f_1^{\tilde{c}}({}^{\beta_1(x)}_{\alpha_1(x)}x)\tilde{\cap}\left(\tilde{\bigcup}_{y\in A} f_2^{\tilde{c}}({}^{\beta_2(y)}_{\alpha_2(y)}y)\right)\right), & x\in A \\ \left({}^{\beta_1(x)}_{\alpha_1(x)}x, f_1^{\tilde{c}}({}^{\beta_1(x)}_{\alpha_1(x)}x)\right), & x\in E\setminus A \end{array}\right. \\
&= f_1^{\tilde{c}}\tilde{\cap}^r_A f_2^{\tilde{c}}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

*ii. i.*'nin kantına benzer biçimde yapılabilir. □

**Not 3.39.** $E=\{x_1,x_2,x_3\}$ bir parametre kümesi ve $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ bir evrensel küme olmak üzere

$$f_1=\left\{\left({}^{[0.2,0.5]}_{[0,0.3]}x_1, {}^{[0.6,0.8]}_{[0,0.1]}U\right), \left({}^{1}_{0}x_3, 1_U\right)\right\}$$

ve

$$f_2=\left\{\left({}^{1}_{0}x_2, 1_U\right), \left({}^{[0.1,0.6]}_{[0.1,0.2]}x_3, {}^{[0.2,0.7]}_{[0.1,0.2]}U\right)\right\}$$

verilsin. O halde, $f_1\tilde{\cup}^r f_2=f_1$, $f_2\tilde{\cup}^r f_1=f_2$, $f_1\tilde{\cap}^r f_2=f_1$ ve $f_2\tilde{\cap}^r f_1=f_2$ olduğundan $f_1\tilde{\cup}^r f_2\neq f_2\tilde{\cup}^r f_1$ ve $f_1\tilde{\cap}^r f_2\neq f_2\tilde{\cap}^r f_1$ elde edilir. Dolayısıyla, $d$-kümelerde $A$-bağıl birleşim ve $A$-bağıl kesişim işlemleri değişme özelliğini sağlamaz.

**Not 3.40.** Örnek 3.29'da verilen $U$, $E$, $f_1$ ve $f_2$ göz önüne alınsın. Ayrıca, $A=\{x_1,x_3\}$, $B=\{x_2,x_3\}$ ve

$$
\begin{aligned}
f_3 = \Big\{&\left({}^{[0,0.3]}_{[0.1,0.5]}x_1, \left\{{}^{[0.2,0.3]}_{[0.3,0.5]}u_1, {}^{[0.1,0.2]}_{[0.3,0.7]}u_2, {}^{[0,0.6]}_{[0.2,0.3]}u_3, {}^{[0.3,0.4]}_{[0,0.5]}u_4\right\}\right), \left({}^{[0.2,0.4]}_{[0.5,0.6]}x_2, \left\{{}^{[0.3,0.5]}_{[0.1,0.4]}u_1, {}^{[0,0.2]}_{[0.1,0.6]}u_2, {}^{[0.1,0.2]}_{[0.5,0.7]}u_3, {}^{[0.4,0.5]}_{[0.1,0.2]}u_4\right\}\right), \\
&\left({}^{[0.5,0.6]}_{[0,0.4]}x_3, \left\{{}^{[0.1,0.2]}_{[0.5,0.6]}u_1, {}^{[0.2,0.5]}_{[0.3,0.4]}u_2, {}^{[0.2,0.4]}_{[0.1,0.2]}u_3, {}^{[0.6,0.7]}_{[0.2,0.3]}u_4\right\}\right)\Big\}
\end{aligned}
$$

verilsin. O halde,

$$
\begin{aligned}
f_2\tilde{\cup}^r_A(f_3\tilde{\cap}^r_A f_1) = \Big\{&\left({}^{[0,0.3]}_{[0.1,0.5]}x_1, \left\{{}^{[0.1,0.2]}_{[0.5,0.6]}u_1, {}^{[0.1,0.2]}_{[0.3,0.7]}u_2, {}^{[0,0.4]}_{[0.2,0.3]}u_3, {}^{[0,0.1]}_{[0.5,0.7]}u_4\right\}\right), \left({}^{[0.2,0.3]}_{[0,0.5]}x_2, \left\{{}^{[0.1,0.2]}_{[0.4,0.5]}u_1, {}^{[0.3,0.7]}_{[0.1,0.2]}u_2, {}^{[0.3,0.4]}_{[0.4,0.6]}u_3\right\}\right), \\
&\left({}^{[0.3,0.8]}_{[0,0.1]}x_3, \left\{{}^{1}_{0}u_1, {}^{[0.1,0.2]}_{[0.3,0.7]}u_2, {}^{[0.2,0.4]}_{[0,0.3]}u_3, {}^{[0.1,0.4]}_{[0.5,0.6]}u_4\right\}\right)\Big\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(f_2\tilde{\cup}^r_A f_3)\tilde{\cap}^r_A(f_2\tilde{\cup}^r_A f_1) = \Big\{&\left({}^{[0,0.3]}_{[0.1,0.5]}x_1, \left\{{}^{[0.1,0.2]}_{[0.5,0.6]}u_1, {}^{[0,0.3]}_{[0.2,0.4]}u_3, {}^{[0.1,0.4]}_{[0.5,0.6]}u_4\right\}\right), \left({}^{[0.2,0.3]}_{[0,0.5]}x_2, \left\{{}^{[0.1,0.2]}_{[0.4,0.5]}u_1, {}^{[0.3,0.7]}_{[0.1,0.2]}u_2, {}^{[0.3,0.4]}_{[0.4,0.6]}u_3\right\}\right), \\
&\left({}^{[0.3,0.8]}_{[0,0.1]}x_3, \left\{{}^{1}_{0}u_1, {}^{[0.2,0.3]}_{[0,0.4]}u_3, {}^{[0.1,0.4]}_{[0.5,0.6]}u_4\right\}\right)\Big\}
\end{aligned}
$$

olduğundan $f_2\tilde{\cup}^r_A(f_3\tilde{\cap}^r_A f_1)\neq(f_2\tilde{\cup}^r_A f_3)\tilde{\cap}^r_A(f_2\tilde{\cup}^r_A f_1)$ elde edilir. Dolayısıyla, $d$-kümelerde

$A$-bağıl birleşim işlemi $A$-bağıl kesişim işlemi üzerine soldan dağılma özelliğini sağlamaz. Bu nedenle, $d$-kümelerde $A$-bağıl birleşim işlemi $A$-bağıl kesişim işlemi üzerine dağılma özelliğini sağlamaz. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} f_3 \tilde{\cap}^r_A (f_2 \tilde{\cup}^r_A f_1) = \; & \Big\{ \Big( {}^{[0,0.3]}_{[0.1,0.5]} x_1, \Big\{ {}^{[0.2,0.3]}_{[0.3,0.5]} u_1, {}^{[0,0.3]}_{[0.2,0.4]} u_3, {}^{[0.1,0.4]}_{[0.5,0.6]} u_4 \Big\} \Big), \Big( {}^{[0.2,0.4]}_{[0.5,0.6]} x_2, \Big\{ {}^{[0.3,0.5]}_{[0.1,0.4]} u_1, {}^{[0,0.2]}_{[0.1,0.6]} u_2, {}^{[0.1,0.2]}_{[0.5,0.7]} u_3, {}^{[0.4,0.5]}_{[0.1,0.2]} u_4 \Big\} \Big), \\ & \Big( {}^{[0.3,0.6]}_{[0,0.4]} x_3, \Big\{ {}^{[0.1,0.2]}_{[0.5,0.6]} u_1, {}^{[0.2,0.3]}_{[0.1,0.4]} u_3, {}^{[0.1,0.4]}_{[0.5,0.6]} u_4 \Big\} \Big) \Big\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (f_3 \tilde{\cap}^r_A f_2) \tilde{\cup}^r_A (f_3 \tilde{\cap}^r_A f_1) = \; & \Big\{ \Big( {}^{[0,0.3]}_{[0.1,0.5]} x_1, \Big\{ {}^{[0.2,0.3]}_{[0.3,0.5]} u_1, {}^{[0.1,0.2]}_{[0.3,0.7]} u_2, {}^{[0,0.4]}_{[0.2,0.3]} u_3, {}^{[0.1,0.4]}_{[0.5,0.6]} u_4 \Big\} \Big), \\ & \Big( {}^{[0.2,0.4]}_{[0.5,0.6]} x_2, \Big\{ {}^{[0.3,0.5]}_{[0.1,0.4]} u_1, {}^{[0,0.2]}_{[0.1,0.6]} u_2, {}^{[0.1,0.2]}_{[0.5,0.7]} u_3, {}^{[0.4,0.5]}_{[0.1,0.2]} u_4 \Big\} \Big), \\ & \Big( {}^{[0.3,0.6]}_{[0,0.4]} x_3, \Big\{ {}^{[0.1,0.2]}_{[0.5,0.6]} u_1, {}^{[0.1,0.2]}_{[0.3,0.7]} u_2, {}^{[0.2,0.4]}_{[0.1,0.3]} u_3, {}^{[0.1,0.4]}_{[0.5,0.6]} u_4 \Big\} \Big) \Big\} \end{aligned}$$

olduğundan $f_3 \tilde{\cap}^r_A (f_2 \tilde{\cup}^r_A f_1) \neq (f_3 \tilde{\cap}^r_A f_2) \tilde{\cup}^r_A (f_3 \tilde{\cap}^r_A f_1)$ elde edilir. Dolayısıyla, $d$-kümelerde $A$-bağıl kesişim işlemi $A$-bağıl birleşim işlemi üzerine soldan dağılma özelliğini sağlamaz. Bu nedenle, $d$-kümelerde $A$-bağıl kesişim işlemi $A$-bağıl birleşim işlemi üzerine dağılma özelliğini sağlamaz.

**Tanım 3.41.** $f_1 \in D_{E_1}(U)$ ve $f_2 \in D_{E_2}(U)$ olsun. O halde,

$$\alpha_3(x,y) := \inf\{\alpha_1(x), \alpha_2(y)\}$$

ve

$$\beta_3(x,y) := \sup\{\beta_1(x), \beta_2(y)\}$$

olmak üzere,

$$f_3\big( {}^{\alpha_3(x,y)}_{\beta_3(x,y)} (x,y) \big) := f_1\big( {}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)} x \big) \tilde{\cap} f_2\big( {}^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)} y \big)$$

ile tanımlı $f_3 \in D_{E_1 \times E_2}(U)$'e $f_1$ ile $f_2$'nin ve-çarpımı denir ve $f_1 \wedge f_2$ ile gösterilir.

**Tanım 3.42.** $f_1 \in D_{E_1}(U)$ ve $f_2 \in D_{E_2}(U)$ olsun. O halde,

$$\alpha_3(x,y) := \sup\{\alpha_1(x), \alpha_2(y)\}$$

ve

$$\beta_3(x,y) := \inf\{\beta_1(x), \beta_2(y)\}$$

olmak üzere,

$$f_3\big( {}^{\alpha_3(x,y)}_{\beta_3(x,y)} (x,y) \big) := f_1\big( {}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)} x \big) \tilde{\cup} f_2\big( {}^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)} y \big)$$

ile tanımlı $f_3 \in D_{E_1 \times E_2}(U)$'e $f_1$ ile $f_2$'nin veya-çarpımı denir ve $f_1 \vee f_2$ ile gösterilir.

**Tanım 3.43.** $f_1 \in D_{E_1}(U)$ ve $f_2 \in D_{E_2}(U)$ olsun. O halde,

$$\alpha_3(x,y) := \inf\{\alpha_1(x), \beta_2(y)\}$$

ve

$$\beta_3(x,y) := \sup\{\beta_1(x), \alpha_2(y)\}$$

olmak üzere,

$$f_3\left(\tbinom{\alpha_3(x,y)}{\beta_3(x,y)}(x,y)\right) := f_1\left(\tbinom{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x\right) \tilde{\cap} f_2^{\tilde{c}}\left(\tbinom{\beta_2(y)}{\alpha_2(y)}y\right)$$

ile tanımlı $f_3 \in D_{E_1 \times E_2}(U)$'e $f_1$ ile $f_2$'nin vedeğil-çarpımı denir ve $f_1 \overline{\wedge} f_2$ ile gösterilir.

**Tanım 3.44.** $f_1 \in D_{E_1}(U)$ ve $f_2 \in D_{E_2}(U)$ olsun. O halde,

$$\alpha_3(x,y) := \sup\{\alpha_1(x), \beta_2(y)\}$$

ve

$$\beta_3(x,y) := \inf\{\beta_1(x), \alpha_2(y)\}$$

olmak üzere,

$$f_3\left(\tbinom{\alpha_3(x,y)}{\beta_3(x,y)}(x,y)\right) := f_1\left(\tbinom{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x\right) \tilde{\cup} f_2^{\tilde{c}}\left(\tbinom{\beta_2(y)}{\alpha_2(y)}y\right)$$

ile tanımlı $f_3 \in D_{E_1 \times E_2}(U)$'e $f_1$ ile $f_2$'nin veyadeğil-çarpımı denir ve $f_1 \underline{\vee} f_2$ ile gösterilir.

**Önerme 3.45.** $f_1 \in D_{E_1}(U)$, $f_2 \in D_{E_2}(U)$ ve $f_3 \in D_{E_3}(U)$ olsun. O halde,
*i.* $(f_1 \vee f_2) \vee f_3 = f_1 \vee (f_2 \vee f_3)$
*ii.* $(f_1 \wedge f_2) \wedge f_3 = f_1 \wedge (f_2 \wedge f_3)$
biçimindedir.

KANIT.
*i.* $f_1 \in D_{E_1}(U)$, $f_2 \in D_{E_2}(U)$, $f_3 \in D_{E_3}(U)$ ve $E_{123} = E_1 \times E_2 \times E_3$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
(f_1 \vee f_2) \vee f_3 &= \left(\left\{\left(\tbinom{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x, f_1(\tbinom{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x)\right) : x \in E_1\right\} \vee \left\{\left(\tbinom{\alpha_2(y)}{\beta_2(y)}y, f_2(\tbinom{\alpha_2(y)}{\beta_2(y)}y)\right) : y \in E_2\right\}\right) \vee \left\{\left(\tbinom{\alpha_3(z)}{\beta_3(z)}z, f_3(\tbinom{\alpha_3(z)}{\beta_3(z)}z)\right) : z \in E_3\right\} \\
&= \left\{\left(\tbinom{\sup\{\alpha_1(x),\alpha_2(y)\}}{\inf\{\beta_1(x),\beta_2(y)\}}(x,y), f_1(\tbinom{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x) \tilde{\cup} f_2(\tbinom{\alpha_2(y)}{\beta_2(y)}y)\right) : (x,y) \in E_{12}\right\} \vee \left\{\left(\tbinom{\alpha_3(z)}{\beta_3(z)}z, f_3(\tbinom{\alpha_3(z)}{\beta_3(z)}z)\right) : z \in E_3\right\} \\
&= \left\{\left(\tbinom{\sup\{\sup\{\alpha_1(x),\alpha_2(y)\},\alpha_3(z)\}}{\inf\{\inf\{\beta_1(x),\beta_2(y)\},\beta_3(z)\}}(x,y,z), \left(f_1(\tbinom{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x) \tilde{\cup} f_2(\tbinom{\alpha_2(y)}{\beta_2(y)}y)\right) \tilde{\cup} f_3(\tbinom{\alpha_3(z)}{\beta_3(z)}z)\right) : (x,y,z) \in E_{123}\right\} \\
&= \left\{\left(\tbinom{\sup\{\alpha_1(x),\sup\{\alpha_2(y),\alpha_3(z)\}\}}{\inf\{\beta_1(x),\inf\{\beta_2(y),\beta_3(z)\}\}}(x,y,z), f_1(\tbinom{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x) \tilde{\cup} \left(f_2(\tbinom{\alpha_2(y)}{\beta_2(y)}y) \tilde{\cup} f_3(\tbinom{\alpha_3(z)}{\beta_3(z)}z)\right)\right) : (x,y,z) \in E_{123}\right\} \\
&= \left\{\left(\tbinom{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x, f_1(\tbinom{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x)\right) : x \in E_1\right\} \vee \left\{\left(\tbinom{\sup\{\alpha_2(y),\alpha_3(z)\}}{\inf\{\beta_2(y),\beta_3(z)\}}(y,z), f_2(\tbinom{\alpha_2(y)}{\beta_2(y)}y) \tilde{\cup} f_3(\tbinom{\alpha_3(z)}{\beta_3(z)}z)\right) : (y,z) \in E_{23}\right\} \\
&= \left\{\left(\tbinom{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x, f_1(\tbinom{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}x)\right) : x \in E_1\right\} \vee \left(\left\{\left(\tbinom{\alpha_2(y)}{\beta_2(y)}y, f_2(\tbinom{\alpha_2(y)}{\beta_2(y)}y)\right) : y \in E_2\right\} \vee \left\{\left(\tbinom{\alpha_3(z)}{\beta_3(z)}z, f_3(\tbinom{\alpha_3(z)}{\beta_3(z)}z)\right) : z \in E_3\right\}\right) \\
&= f_1 \vee (f_2 \vee f_3)
\end{aligned}$$

elde edilir.

*ii. i.*'nin kanıtına benzer biçimde yapılabilir. □

**Önerme 3.46.** $f_1 \in D_{E_1}(U)$ ve $f_2 \in D_{E_2}(U)$ olsun. O halde, aşağıdaki De Morgan kuralları sağlanır.

*i.* $(f_1 \vee f_2)^{\tilde{c}} = f_1^{\tilde{c}} \wedge f_2^{\tilde{c}}$
*ii.* $(f_1 \wedge f_2)^{\tilde{c}} = f_1^{\tilde{c}} \vee f_2^{\tilde{c}}$
*iii.* $(f_1 \underline{\vee} f_2)^{\tilde{c}} = f_1^{\tilde{c}} \overline{\wedge} f_2^{\tilde{c}}$
*iv.* $(f_1 \overline{\wedge} f_2)^{\tilde{c}} = f_1^{\tilde{c}} \underline{\vee} f_2^{\tilde{c}}$

KANIT.
*iv.* $f_1 \in D_{E_1}(U)$ ve $f_2 \in D_{E_2}(U)$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
(f_1 \overline{\wedge} f_2)^{\tilde{c}} &= \left(\left\{\left({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x, f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\right) : x \in E_1\right\} \overline{\wedge} \left\{\left({}^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)}y, f_2({}^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)}y)\right) : y \in E_2\right\}\right)^{\tilde{c}} \\
&= \left\{\left({}^{\inf\{\alpha_1(x),\beta_2(y)\}}_{\sup\{\beta_1(x),\alpha_2(y)\}}(x,y), f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x) \tilde{\cap} f_2^{\tilde{c}}({}^{\beta_2(y)}_{\alpha_2(y)}y)\right) : (x,y) \in E_1 \times E_2\right\}^{\tilde{c}} \\
&= \left\{\left({}^{\sup\{\beta_1(x),\alpha_2(y)\}}_{\inf\{\alpha_1(x),\beta_2(y)\}}(x,y), f_1^{\tilde{c}}({}^{\beta_1(x)}_{\alpha_1(x)}x) \tilde{\cup} \left(f_2^{\tilde{c}}({}^{\beta_2(y)}_{\alpha_2(y)}y)\right)^{\tilde{c}}\right) : (x,y) \in E_1 \times E_2\right\} \\
&= \left\{\left({}^{\beta_1(x)}_{\alpha_1(x)}x, f_1^{\tilde{c}}({}^{\beta_1(x)}_{\alpha_1(x)}x)\right) : x \in E_1\right\} \underline{\vee} \left\{\left({}^{\beta_2(y)}_{\alpha_2(y)}y, f_2^{\tilde{c}}({}^{\beta_2(y)}_{\alpha_2(y)}y)\right) : y \in E_2\right\} \\
&= \left\{\left({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x, f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x)\right) : x \in E_1\right\}^{\tilde{c}} \underline{\vee} \left\{\left({}^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)}y, f_2({}^{\alpha_2(y)}_{\beta_2(y)}y)\right) : y \in E_2\right\}^{\tilde{c}} \\
&= f_1^{\tilde{c}} \underline{\vee} f_2^{\tilde{c}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer eşitliklerin kanıtları da benzer biçimde yapılabilir. □

**Not 3.47.** $E_1 = E_2 = \{x_1, x_2\}$ iki parametre kümesi, $U = \{u\}$ bir evrensel küme, $f_1 \in D_{E_1}(U)$ ve $f_2 \in D_{E_2}(U)$ olmak üzere

$$f_1 = \left\{\left({}^{[0.2,0.4]}_{[0.3,0.5]}x_1, \left\{{}^{[0.1,0.2]}_{[0.3,0.6]}u\right\}\right), \left({}^{[0.3,0.6]}_{[0.2,0.3]}x_2, \left\{{}^{[0.5,0.6]}_{[0.2,0.3]}u\right\}\right)\right\}$$

ve

$$f_2 = \left\{\left({}^{[0,0.5]}_{[0.1,0.4]}x_1, \left\{{}^{[0.3,0.4]}_{[0,0.1]}u\right\}\right), \left({}^{[0.4,0.5]}_{[0.2,0.4]}x_2, \left\{{}^{[0.2,0.3]}_{[0.4,0.6]}u\right\}\right)\right\}$$

verilsin. O halde,

$$\begin{aligned}
f_1 \wedge f_2 = \quad & \left\{\left({}^{[0,0.4]}_{[0.3,0.5]}(x_1,x_1), \left\{{}^{[0.1,0.2]}_{[0.3,0.6]}u\right\}\right), \left({}^{[0.2,0.4]}_{[0.3,0.5]}(x_1,x_2), \left\{{}^{[0.1,0.2]}_{[0.4,0.6]}u\right\}\right),\right. \\
& \left.\left({}^{[0,0.5]}_{[0.2,0.4]}(x_2,x_1), \left\{{}^{[0.3,0.4]}_{[0.2,0.3]}u\right\}\right), \left({}^{[0.3,0.5]}_{[0.2,0.4]}(x_2,x_2), \left\{{}^{[0.2,0.3]}_{[0.4,0.6]}u\right\}\right)\right\},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_2 \wedge f_1 = \quad & \Big\{ \Big( {}^{[0,0.4]}_{[0.3,0.5]}(x_1,x_1), \Big\{ {}^{[0.1,0.2]}_{[0.3,0.6]}u \Big\} \Big), \Big( {}^{[0,0.5]}_{[0.2,0.4]}(x_1,x_2), \Big\{ {}^{[0.3,0.4]}_{[0.2,0.3]}u \Big\} \Big), \\
& \Big( {}^{[0.2,0.4]}_{[0.3,0.5]}(x_2,x_1), \Big\{ {}^{[0.1,0.2]}_{[0.4,0.6]}u \Big\} \Big), \Big( {}^{[0.3,0.5]}_{[0.2,0.4]}(x_2,x_2), \Big\{ {}^{[0.2,0.3]}_{[0.4,0.6]}u \Big\} \Big) \Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1 \vee f_2 = \quad & \Big\{ \Big( {}^{[0.2,0.5]}_{[0.1,0.4]}(x_1,x_1), \Big\{ {}^{[0.3,0.4]}_{[0,0.1]}u \Big\} \Big), \Big( {}^{[0.4,0.5]}_{[0.2,0.4]}(x_1,x_2), \Big\{ {}^{[0.2,0.3]}_{[0.3,0.6]}u \Big\} \Big), \\
& \Big( {}^{[0.3,0.6]}_{[0.1,0.3]}(x_2,x_1), \Big\{ {}^{[0.5,0.6]}_{[0,0.1]}u \Big\} \Big), \Big( {}^{[0.4,0.6]}_{[0.2,0.3]}(x_2,x_2), \Big\{ {}^{[0.5,0.6]}_{[0.2,0.3]}u \Big\} \Big) \Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2 \vee f_1 = \quad & \Big\{ \Big( {}^{[0.2,0.5]}_{[0.1,0.4]}(x_1,x_1), \Big\{ {}^{[0.3,0.4]}_{[0,0.1]}u \Big\} \Big), \Big( {}^{[0.3,0.6]}_{[0.1,0.3]}(x_1,x_2), \Big\{ {}^{[0.5,0.6]}_{[0,0.1]}u \Big\} \Big), \\
& \Big( {}^{[0.4,0.5]}_{[0.2,0.4]}(x_2,x_1), \Big\{ {}^{[0.2,0.3]}_{[0.3,0.6]}u \Big\} \Big), \Big( {}^{[0.4,0.6]}_{[0.2,0.3]}(x_2,x_2), \Big\{ {}^{[0.5,0.6]}_{[0.2,0.3]}u \Big\} \Big) \Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1 \overline{\wedge} f_2 = \quad & \Big\{ \Big( {}^{[0.1,0.4]}_{[0.3,0.5]}(x_1,x_1), \Big\{ {}^{[0,0.1]}_{[0.3,0.6]}u \Big\} \Big), \Big( {}^{[0.2,0.4]}_{[0.4,0.5]}(x_1,x_2), \Big\{ {}^{[0.1,0.2]}_{[0.3,0.6]}u \Big\} \Big), \\
& \Big( {}^{[0.1,0.4]}_{[0.2,0.5]}(x_2,x_1), \Big\{ {}^{[0,0.1]}_{[0.3,0.4]}u \Big\} \Big), \Big( {}^{[0.2,0.4]}_{[0.4,0.5]}(x_2,x_2), \Big\{ {}^{[0.4,0.6]}_{[0.2,0.3]}u \Big\} \Big) \Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2 \overline{\wedge} f_1 = \quad & \Big\{ \Big( {}^{[0,0.5]}_{[0.2,0.4]}(x_1,x_1), \Big\{ {}^{[0.3,0.4]}_{[0.1,0.2]}u \Big\} \Big), \Big( {}^{[0,0.3]}_{[0.3,0.6]}(x_1,x_2), \Big\{ {}^{[0.2,0.3]}_{[0.5,0.6]}u \Big\} \Big), \\
& \Big( {}^{[0.3,0.5]}_{[0.2,0.4]}(x_2,x_1), \Big\{ {}^{[0.2,0.3]}_{[0.4,0.6]}u \Big\} \Big), \Big( {}^{[0.2,0.3]}_{[0.3,0.6]}(x_2,x_2), \Big\{ {}^{[0.2,0.3]}_{[0.5,0.6]}u \Big\} \Big) \Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1 \underline{\vee} f_2 = \quad & \Big\{ \Big( {}^{[0.2,0.4]}_{[0,0.5]}(x_1,x_1), \Big\{ {}^{[0.1,0.2]}_{[0.3,0.4]}u \Big\} \Big), \Big( {}^{[0.2,0.4]}_{[0.3,0.5]}(x_1,x_2), \Big\{ {}^{[0.4,0.6]}_{[0.2,0.3]}u \Big\} \Big), \\
& \Big( {}^{[0.3,0.6]}_{[0,0.3]}(x_2,x_1), \Big\{ {}^{[0.5,0.6]}_{[0.2,0.3]}u \Big\} \Big), \Big( {}^{[0.3,0.6]}_{[0.2,0.3]}(x_2,x_2), \Big\{ {}^{[0.5,0.6]}_{[0.2,0.3]}u \Big\} \Big) \Big\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
f_2 \underline{\vee} f_1 = \quad & \Big\{ \Big( {}^{[0.3,0.5]}_{[0.1,0.4]}(x_1,x_1), \Big\{ {}^{[0.3,0.6]}_{[0,0.1]}u \Big\} \Big), \Big( {}^{[0.2,0.5]}_{[0.1,0.4]}(x_1,x_2), \Big\{ {}^{[0.3,0.4]}_{[0,0.1]}u \Big\} \Big), \\
& \Big( {}^{[0.4,0.5]}_{[0.2,0.4]}(x_2,x_1), \Big\{ {}^{[0.3,0.6]}_{[0.1,0.2]}u \Big\} \Big), \Big( {}^{[0.4,0.5]}_{[0.2,0.4]}(x_2,x_2), \Big\{ {}^{[0.2,0.3]}_{[0.4,0.6]}u \Big\} \Big) \Big\}
\end{aligned}
$$

olduğundan $f_1 \wedge f_2 \neq f_2 \wedge f_1$, $f_1 \vee f_2 \neq f_2 \vee f_1$, $f_1 \overline{\wedge} f_2 \neq f_2 \overline{\wedge} f_1$ ve $f_1 \underline{\vee} f_2 \neq f_2 \underline{\vee} f_1$ elde edilir. Dolayısıyla, $d$-kümelerin yukarıda bahsedilen çarpımları değişme özelliğini sağlamaz.

**Not 3.48.** $f_1 \in D_{E_1}(U)$, $f_2 \in D_{E_2}(U)$ ve $f_3 \in D_{E_3}(U)$ olsun. O halde, $f_1 \wedge (f_2 \vee f_3) \in D_{E_1 \times E_2 \times E_3}(U)$ ve $(f_1 \wedge f_2) \vee (f_1 \wedge f_3) \in D_{E_1 \times E_2 \times E_1 \times E_3}(U)$ biçimindedir. Dolayısıyla, $E_1 \times E_2 \times E_3 \neq E_1 \times E_2 \times E_1 \times E_3$ olduğundan $d$-kümelerde ve-çarpım işlemi veya-çarpım işlemi üzerine soldan dağılma özelliğini sağlamaz. Ayrıca, $(f_1 \vee f_2) \wedge f_3 \in D_{E_1 \times E_2 \times E_3}(U)$ ve $(f_1 \wedge f_3) \vee (f_2 \wedge f_3) \in D_{E_1 \times E_3 \times E_2 \times E_3}(U)$ biçimindedir. Dolayısıyla, $E_1 \times E_2 \times E_3 \neq E_1 \times E_3 \times E_2 \times E_3$ olduğundan $d$-kümelerde ve-çarpım işlemi veya-çarpım işlemi üzerine sağdan dağılma özelliğini sağlamaz. Sonuç olarak, $d$-kümelerde ve-çarpım işlemi veya-çarpım işlemi üzerine dağılma özelliğini sağlamaz. Benzer şekilde, diğer çarpımlar da birbirleri üzerine dağılma özelliğini sağlamaz.

**Not 3.49.** $E_1 = \{x_1\}$, $E_2 = \{x_2\}$ ve $E_3 = \{x_3\}$ üç parametre kümesi ve $U = \{u\}$ bir evrensel küme olmak üzere

$$f_1 = \left\{ \left( {}^{[0.3,0.5]}_{[0.2,0.4]}x_1, \left\{ {}^{[0,0.2]}_{[0.3,0.7]}u \right\} \right) \right\},$$

$$f_2 = \left\{ \left( {}^{[0.1,0.4]}_{[0.3,0.6]}x_2, \left\{ {}^{[0.2,0.3]}_{[0.4,0.5]}u \right\} \right) \right\}$$

ve

$$f_3 = \left\{ \left( {}^{[0.5,0.7]}_{[0.1,0.2]}x_3, \left\{ {}^{[0.1,0.6]}_{[0.2,0.4]}u \right\} \right) \right\}$$

verilsin. O halde,

$$f_1 \overline{\wedge} (f_2 \overline{\wedge} f_3) = \left\{ \left( {}^{[0.3,0.5]}_{[0.2,0.4]}(x_1, x_2, x_3), \left\{ {}^{[0,0.2]}_{[0.3,0.7]}u \right\} \right) \right\},$$

$$(f_1 \overline{\wedge} f_2) \overline{\wedge} f_3 = \left\{ \left( {}^{[0.1,0.2]}_{[0.5,0.7]}(x_1, x_2, x_3), \left\{ {}^{[0,0.2]}_{[0.3,0.7]}u \right\} \right) \right\},$$

$$f_1 \underline{\vee} (f_2 \underline{\vee} f_3) = \left\{ \left( {}^{[0.3,0.6]}_{[0.1,0.4]}(x_1, x_2, x_3), \left\{ {}^{[0.1,0.5]}_{[0.2,0.4]}u \right\} \right) \right\}$$

ve

$$(f_1 \underline{\vee} f_2) \underline{\vee} f_3 = \left\{ \left( {}^{[0.3,0.6]}_{[0.1,0.4]}(x_1, x_2, x_3), \left\{ {}^{[0.4,0.5]}_{[0.1,0.3]}u \right\} \right) \right\}$$

olduğundan $f_1 \overline{\wedge} (f_2 \overline{\wedge} f_3) \neq (f_1 \overline{\wedge} f_2) \overline{\wedge} f_3$ ve $f_1 \underline{\vee} (f_2 \underline{\vee} f_3) \neq (f_1 \underline{\vee} f_2) \underline{\vee} f_3$ elde edilir. Dolayısıyla, $d$-kümelerde vedeğil-çarpım ve veyadeğil-çarpım birleşme özelliğini sağlamaz.

**Tanım 3.50.** $f_1, f_2, f_3 \in D_E(U)$ olsun. Eğer $\kappa_3 = \kappa_1 \tilde{+} \kappa_2$ ve her $x \in E$ için, $f_3({}^{\alpha_3(x)}_{\beta_3(x)}x) = f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x) \tilde{+} f_2({}^{\alpha_2(x)}_{\beta_2(x)}x)$ oluyorsa, $f_3$'e $f_1$ ile $f_2$'nin toplamı denir ve $f_1 \tilde{+} f_2$ ile gösterilir.

**Tanım 3.51.** $f_1, f_2, f_3 \in D_E(U)$ olsun. Eğer $\kappa_3 = \kappa_1 \tilde{\cdot} \kappa_2$ ve her $x \in E$ için, $f_3({}^{\alpha_3(x)}_{\beta_3(x)}x) = f_1({}^{\alpha_1(x)}_{\beta_1(x)}x) \tilde{\cdot} f_2({}^{\alpha_2(x)}_{\beta_2(x)}x)$ oluyorsa, $f_3$'e $f_1$ ile $f_2$'nin çarpımı denir ve $f_1 \tilde{\cdot} f_2$ ile gösterilir.

**Önerme 3.52.** $f, f_1, f_2, f_3 \in D_E(U)$ olsun. O halde,

*i.* $f_1 \tilde{+} f_2 = f_2 \tilde{+} f_1$ ve $f_1 \tilde{\cdot} f_2 = f_2 \tilde{\cdot} f_1$

*ii.* $(f_1 \tilde{+} f_2) \tilde{+} f_3 = f_1 \tilde{+} (f_2 \tilde{+} f_3)$ ve $(f_1 \tilde{\cdot} f_2) \tilde{\cdot} f_3 = f_1 \tilde{\cdot} (f_2 \tilde{\cdot} f_3)$

*iii.* $f \tilde{+} \tilde{0} = f$ ve $f \tilde{\cdot} \tilde{1} = f$

*iv.* $f \tilde{+} \tilde{1} = \tilde{1}$ ve $f \tilde{\cdot} \tilde{0} = \tilde{0}$

biçimindedir.

**Önerme 3.53.** $f_1, f_2 \in D_E(U)$ olsun. O halde, aşağıdaki De Morgan kuralları sağlanır.

*i.* $(f_1 \tilde{+} f_2)^{\tilde{c}} = f_1^{\tilde{c}} \tilde{\cdot} f_2^{\tilde{c}}$

*ii.* $(f_1 \tilde{\cdot} f_2)^{\tilde{c}} = f_1^{\tilde{c}} \tilde{+} f_2^{\tilde{c}}$

## BÖLÜM 4
## *d*-KÜMELER YOLUYLA İNŞA EDİLEN BİR ESNEK KARAR VERME METODU

Bu bölümde, $d$-kümeler yoluyla inşa edilen bir esnek karar verme metodu iki farklı karar verme problemine uygulandı (Aydın ve Enginoğlu, 2020). Bu amaçla, ilk olarak, bir $d$-kümeyi evrensel küme üzerinde bir $ivif$-kümeye indirgeyen bir birleştirme/toplama (aggregation) operatörü tanımlandı.

**Tanım 4.1.** $\mathscr{A}(f) = f^*$ ile tanımlı $\mathscr{A} : D_E(U) \to IVIF(U)$ fonksiyonuna $U$ üzerinde bir birleştirme operatörü denir.

Burada,

$$f = \left\{ \left( {}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, \left\{ {}^{\omega_x(u)}_{\theta_x(u)}u : u \in U \right\} \right) : x \in E \right\}$$

olmak üzere,

$$f^* = \left\{ {}^{\omega^*(u)}_{\theta^*(u)}u : u \in U \right\},$$

$$\omega^*(u) = \frac{1}{|\kappa|_a} \sum_{x \in E} \alpha(x)\omega_x(u) \quad \text{ve} \quad \theta^*(u) = \frac{1}{|\kappa|_a} \sum_{x \in E} \beta(x)\theta_x(u)$$

biçimindedir. Ayrıca, $f^*$, $f$'nin birleştirilmiş/toplanan (aggregate) $ivif$-kümesi olarak adlandırılır.

Bu bölümde, ikinci olarak, birleştirilmiş $ivif$-küme kavramı kullanılarak, alternatiflere performans temelli bir değer atayan bir esnek karar verme metodu önerildi. Bu metot, hem parametreleri hem de alternatifleri $ivif$-değerler içeren karar verme problemleri için alternatifler arasından optimum elemanların seçimine izin vermektedir.

*Önerilen Metodun Algoritma Adımları*

**Adım 1.** $U$ üzerinde bir $f$ $d$-kümesi inşa edilir.
**Adım 2.** $f$'nin $f^*$ birleştirilmiş $ivif$-kümesi elde edilir.
**Adım 3.** Her $u \in U$ için, $s(u) = \omega^*(u) - \theta^*(u)$ değerleri elde edilir.
**Adım 4.** $d(u_k) = \left[ \frac{s^-(u_k)+|\min_i s^-(u_i)|}{\max_i s^+(u_i)+|\min_i s^-(u_i)|}, \frac{s^+(u_k)+|\min_i s^-(u_i)|}{\max_i s^+(u_i)+|\min_i s^-(u_i)|} \right]$ olacak biçimde bir $\{^{d(u_k)}u_k | u_k \in U\}$ karar kümesi elde edilir. Burada, $u \in U$ için, $s(u) := [s^-(u), s^+(u)]$ biçimindedir.
**Adım 5.** "$\leq_{XY}$" tam sıralama bağıntısı yoluyla alternatifler arasından optimum elemanlar seçilir.

Bu bölümde önerilen esnek karar verme metodu, $d$-kümeler yoluyla inşa edilen ilk ve tek metot olduğu için, bu metodu alan yazındaki metotlarla karşılaştırmak mümkün değildir. Ancak modellenen problemde belirsizlik azaltılırsa, önerilen metodu bu yapının (*d*-küme) alt yapıları (*ifpifs*-küme, *fpifs*-küme ve *fpfs*-küme gibi) yoluyla inşa edilen metotlarla karşılaştırmak mümkün hâle gelir. Bu nedenle, ortalama indirgeme (mean reduction), ortalama çift indirgeme (mean bireduction), ortalama çift indirgeme-indirgeme (mean bireduction-reduction) ve ortalama indirgeme-çift indirgeme (mean reduction-bireduction) olarak adlandırılan dört yeni kavram tanımlandı.

**Tanım 4.2.** $f := \left\{ \left( {}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, \left\{ {}^{\omega(u)}_{\theta(u)}u : u \in U \right\} \right) : x \in E \right\}$ olmak üzere $f \in D_E(U)$ verilsin. O halde,

$$\left\{ \left( {}^{\frac{\alpha^-(x)+\alpha^+(x)}{2}}_{\frac{\beta^-(x)+\beta^+(x)}{2}}x, \left\{ {}^{\frac{\omega^-(u)+\omega^+(u)}{2}}_{\frac{\theta^-(u)+\theta^+(u)}{2}}u : u \in U \right\} \right) : x \in E \right\}$$

*ifpifs*-kümesine $f$'nin ortalama indirgemesi denir ve $f_{mr}$ ile gösterilir.

**Tanım 4.3.** $f := \left\{ \left( {}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, \left\{ {}^{\omega(u)}_{\theta(u)}u : u \in U \right\} \right) : x \in E \right\}$ olmak üzere $f \in D_E(U)$ verilsin. O halde,

$$\left\{ \left( {}^{\frac{\alpha^-(x)+\alpha^+(x)-\beta^-(x)-\beta^+(x)+2}{4}}x, \left\{ {}^{\frac{\omega^-(u)+\omega^+(u)-\theta^-(u)-\theta^+(u)+2}{4}}u : u \in U \right\} \right) : x \in E \right\}$$

*fpfs*-kümesine $f$'nin ortalama çift indirgemesi denir ve $f_{mb}$ ile gösterilir .

**Tanım 4.4.** $f := \left\{ \left( {}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, \left\{ {}^{\omega(u)}_{\theta(u)}u : u \in U \right\} \right) : x \in E \right\}$ olmak üzere $f \in D_E(U)$ verilsin. O halde,

$$\left\{ \left( {}^{\frac{\alpha^-(x)+\alpha^+(x)-\beta^-(x)-\beta^+(x)+2}{4}}x, \left\{ {}^{\frac{\omega^-(u)+\omega^+(u)}{2}}_{\frac{\theta^-(u)+\theta^+(u)}{2}}u : u \in U \right\} \right) : x \in E \right\}$$

*fpifs*-kümesine $f$'nin ortalama çift indirgeme-indirgemesi denir ve $f_{mbr}$ ile gösterilir.

**Tanım 4.5.** $f := \left\{ \left( {}^{\alpha(x)}_{\beta(x)}x, \left\{ {}^{\omega(u)}_{\theta(u)}u : u \in U \right\} \right) : x \in E \right\}$ olmak üzere $f \in D_E(U)$ verilsin. O halde,

$$\left\{ \left( {}^{\frac{\alpha^-(x)+\alpha^+(x)}{2}}_{\frac{\beta^-(x)+\beta^+(x)}{2}}x, \left\{ {}^{\frac{\omega^-(u)+\omega^+(u)-\theta^-(u)-\theta^+(u)+2}{4}}u : u \in U \right\} \right) : x \in E \right\}$$

*ifpifs*-kümesine $f$'nin ortalama indirgeme-çift indirgemesi denir ve $f_{mrb}$ ile gösterilir.

### 4.1. İşe Alım Sürecinde Uygun Adayların Belirlenmesi Problemine Bir Uygulama

Bu alt bölümde, ilk olarak, önerilen esnek karar verme metodu işe alım ilanında iki boş pozisyon için uygun adayların belirlenmesine ilişkin bir kurgu probleme uygulandı. Bu problemde, şirket tarafından ilan edilen pozisyonlar için $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ olmak üzere altı adayın başvurduğu varsayılmaktadır. Ayrıca, $x_1 =$ "*yazılım bilgisi*", $x_2 =$ "*yabancı dil bilgisi*", $x_3 =$ "*yaş*" ve $x_4 =$ "*deneyim*" olmak üzere $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ bir parametre kümesi şirketin insan kaynakları birimi tarafından belirlenmektedir. Bu problemde, parametrelerin *ivif*-değerleri $I=\left\{k:\mu_k^x=\max\limits_n \mu_n^x\right\}$ ve $J=\left\{t:\nu_t^x=\max\limits_n \nu_n^x\right\}$ olmak üzere

$$\alpha(x):=\left[\frac{\min\limits_n \mu_n^x}{\max\limits_n \mu_n^x+\max\limits_n \nu_n^x+\min\left\{\min\limits_{k\in I}\pi_k^x,\min\limits_{t\in J}\pi_t^x\right\}},\frac{\max\limits_n \mu_n^x}{\max\limits_n \mu_n^x+\max\limits_n \nu_n^x+\min\left\{\min\limits_{k\in I}\pi_k^x,\min\limits_{t\in J}\pi_t^x\right\}}\right]$$

ve

$$\beta(x):=\left[\frac{\min\limits_n \nu_n^x}{\max\limits_n \mu_n^x+\max\limits_n \nu_n^x+\min\left\{\min\limits_{k\in I}\pi_k^x,\min\limits_{t\in J}\pi_t^x\right\}},\frac{\max\limits_n \nu_n^x}{\max\limits_n \mu_n^x+\max\limits_n \nu_n^x+\min\left\{\min\limits_{k\in I}\pi_k^x,\min\limits_{t\in J}\pi_t^x\right\}}\right]$$

ile tanımlanan üye olma ve üye olmama fonksiyonları yoluyla insan kaynakları birimi tarafından elde edilir. Burada, $(\mu_n^x)$, $(\nu_n^x)$ ve $(\pi_n^x)$ notasyonları, sırasıyla, parametreler için insan kaynakları birimi tarafından belirlenen kriterlere göre elde edilen üye olma, üye olmama ve belirsizlik derecelerini gösteren sıralı $s$-lilerdir.

Örneğin, insan kaynakları biriminin "*yazılım bilgisi*" parametresi için beş farklı yazılım programı belirlediğini ve bu parametrenin toplam performansa etkisini 20 şirket çalışanını göz önüne alarak hesapladığını varsayalım. Burada, $n$'inci yazılım programı için, geçerli bir sertifikaya sahip olan çalışanların sayısı $\mu_n^{x_1}$, yazılımın nasıl kullanılacağı konusunda bilgisi olmayan çalışanların sayısı $\nu_n^{x_1}$ ve yazılım bilgisi olan fakat geçerli bir sertifikaya sahip olmayan çalışanların sayısı $\pi_n^{x_1}$ ile gösterilsin. Eğer $(\mu_n^{x_1})=(18,10,15,12,9)$, $(\nu_n^{x_1})=(1,5,3,7,7)$ ve $(\pi_n^{x_1})=(1,5,2,1,4)$ olduğu kabul edilirse, $I=\{1\}$ ve $J=\{4,5\}$ olmak üzere, $x_1$ parametresinin üye olma derecesi

$$\begin{aligned}\alpha(x_1) &= \left[\tfrac{\min\{18,10,15,12,9\}}{\max\{18,10,15,12,9\}+\max\{1,5,3,7,7\}+\min\{1,\min\{1,4\}\}},\tfrac{\max\{18,10,15,12,9\}}{\max\{18,10,15,12,9\}+\max\{1,5,3,7,7\}+\min\{1,\min\{1,4\}\}}\right]\\ &=\left[\tfrac{10}{18+7+1},\tfrac{18}{18+7+1}\right]\\ &=[0.38,0.69]\end{aligned}$$

ve üye olmama derecesi

$$\begin{aligned}\beta(x_1) &= \left[\tfrac{\min\{1,5,3,7,7\}}{\max\{18,10,15,12,9\}+\max\{1,5,3,7,7\}+\min\{1,\min\{1,4\}\}},\tfrac{\max\{1,5,3,7,7\}}{\max\{18,10,15,12,9\}+\max\{1,5,3,7,7\}+\min\{1,\min\{1,4\}\}}\right]\\ &=\left[\tfrac{1}{18+7+1},\tfrac{7}{18+7+1}\right]\\ &=[0.04,0.27]\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde, diğer parametrelerin *ivif*-değerleri insan kaynakları birimi tarafından belirlenen kriterlere göre hesaplanabilir. Böylece, $E$ üzerinde bir

$$\kappa = \left\{ {}^{[0.38,0.69]}_{[0.04,0.27]}x_1, {}^{[0.53,0.6]}_{[0.34,0.37]}x_2, {}^{[0.05,0.25]}_{[0.32,0.45]}x_3, {}^{[0.4,0.52]}_{[0.26,0.38]}x_4 \right\}$$

*ivif*-kümesi elde edilir. Burada, $[0.38, 0.69]$ değeri "*yazılım bilgisi*" parametresinin başarı üzerindeki pozitif etkisinin %38 ve %69 arasında değiştiği anlamına gelmektedir. Benzer şekilde, $[0.04, 0.27]$ değeri "*yazılım bilgisi*" parametresinin başarı üzerindeki negatif etkisinin %4 ve %27 arasında değiştiği anlamına gelmektedir.

Ayrıca, bu problemde, her bir parametre için adayların *ivif*-değerleri $I = \left\{k : (\mu_u^x)_k = \max_n (\mu_u^x)_n\right\}$ ve $J = \left\{t : (\mu_u^x)_t = \max_n (\nu_u^x)_n\right\}$ olmak üzere

$$\omega_x(u) = \left[ \frac{\min_n (\mu_u^x)_n}{\max_n (\mu_u^x)_n + \max_n (\nu_u^x)_n + \min\left\{\min_{k\in I} (\pi_u^x)_k, \min_{t\in J} (\pi_u^x)_t\right\}}, \frac{\max_n (\mu_u^x)_n}{\max_n (\mu_u^x)_n + \max_n (\nu_u^x)_n + \min\left\{\min_{k\in I} (\pi_u^x)_k, \min_{t\in J} (\pi_u^x)_t\right\}} \right]$$

ve

$$\theta_x(u) = \left[ \frac{\min_n (\nu_u^x)_n}{\max_n (\mu_u^x)_n + \max_n (\nu_u^x)_n + \min\left\{\min_{k\in I} (\pi_u^x)_k, \min_{t\in J} (\pi_u^x)_t\right\}}, \frac{\max_n (\nu_u^x)_n}{\max_n (\mu_u^x)_n + \max_n (\nu_u^x)_n + \min\left\{\min_{k\in I} (\pi_u^x)_k, \min_{t\in J} (\pi_u^x)_t\right\}} \right]$$

ile tanımlanan üye olma ve üye olmama fonksiyonları yoluyla elde edilir. Burada, $((\mu_u^x)_n)$, $((\nu_u^x)_n)$ ve $((\pi_u^x)_n)$ notasyonları, sırasıyla, adayların parametrelere göre üye olma, üye olmama ve belirsizlik derecelerini gösteren sıralı $s$-lilerdir.

Örneğin, her bir yazılım programına ilişkin adaylara on soru sorulduğu ve adayların bu soruları pozitif/olumlu, negatif/olumsuz ve belirsiz/kararsız olmak üzere üç seviye likert ölçeğine göre cevaplandırdığını varsayalım. Ayrıca, bir adayın $x_1$ parametresine göre pozitif cevaplandırdığı soru sayısı $(\mu_u^{x_1})_n$, negatif cevaplandırdığı soru sayısı $(\nu_u^{x_1})_n$ ve belirsiz cevaplandırdığı soru sayısı $(\pi_u^{x_1})_n$ ile gösterilsin. Eğer $((\mu_{u_5}^{x_1})_n) = (0,0,0,0,0)$, $((\nu_{u_5}^{x_1})_n) = (10,10,10,10,10)$ ve $((\pi_{u_5}^{x_1})_n) = (0,0,0,0,0)$ olduğu kabul edilirse, $x_1$ parametresine göre $u_5$ adayının üye olma derecesi $\omega_x(u) = [0,0] = 0$ ve üye olmama derecesi $\theta_x(u) = [1,1] = 1$ olarak elde edilir. Benzer şekilde, parametrelere göre diğer adayların *ivif*-değerleri hesaplanabilir.

Böylece, önerilen esnek karar verme metodunun bu probleme uygulaması aşağıdaki gibidir:

**Adım 1.** Yukarıda bahsedilen karar verme problemini modelleyen $d$-küme aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} f = \ & \Big\{ \Big( {}^{[0.38,0.69]}_{[0.04,0.27]}x_1, \Big\{ {}^{[0.36,0.46]}_{[0.11,0.28]}u_1, {}^{[0,0.16]}_{[0.38,0.53]}u_2, {}^{[0.15,0.22]}_{[0,0.75]}u_3, {}^{[0.2,0.62]}_{[0.15,0.24]}u_4 \Big\} \Big), \\ & \Big( {}^{[0.53,0.6]}_{[0.34,0.37]}x_2, \Big\{ {}^{[0.24,0.32]}_{[0.34,0.65]}u_1, {}^{[0.28,0.35]}_{[0,0.62]}u_2, {}^{[0.25,0.32]}_{[0.1,0.64]}u_3, {}^{[0.12,0.44]}_{[0.45,0.54]}u_4, {}^{1}_{0}u_5, {}^{[0,0.34]}_{[0,0.2]}u_6 \Big\} \Big), \\ & \Big( {}^{[0.05,0.25]}_{[0.32,0.45]}x_3, \Big\{ {}^{[0.35,0.55]}_{[0.15,0.29]}u_1, {}^{[0.26,0.35]}_{[0.43,0.55]}u_3, {}^{[0.38,0.52]}_{[0.19,0.25]}u_4, {}^{[0.15,0.24]}_{[0.29,0.72]}u_6 \Big\} \Big), \\ & \Big( {}^{[0.4,0.52]}_{[0.26,0.38]}x_4, \Big\{ {}^{0}_{[0.52,0.58]}u_1, {}^{1}_{0}u_2, {}^{[0.18,0.28]}_{[0.27,0.7]}u_3, {}^{0}_{[0.1,1]}u_4, {}^{[0.35,0.4]}_{[0,0.1]}u_5, {}^{[0.28,0.48]}_{[0.33,0.34]}u_6 \Big\} \Big) \Big\} \end{aligned}$$

**Adım 2.** $f^*$ birleştirilmiş *ivif*-kümesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f^* = \Big\{ {}^{[0.1253,0.2878]}_{[0.1349,0.2968]}u_1, {}^{[0.2440,0.3739]}_{[0.1491,0.3660]}u_2, {}^{[0.1221,0.2567]}_{[0.1076,0.4239]}u_3, {}^{[0.0706,0.3657]}_{[0.1094,0.3369]}u_4, {}^{[0.2981,0.3595]}_{[0.1602,0.3373]}u_5, {}^{[0.0532,0.2285]}_{[0.0973,0.3547]}u_6 \Big\}$$

Burada,

$$\begin{aligned} \omega^*(u_1) &= \frac{[0.38,0.69]\cdot[0.36,0.46]+[0.53,0.6]\cdot[0.24,0.32]+[0.05,0.25]\cdot[0.35,0.55]+[0.4,0.52]\cdot[0,0]}{2.2475} \\ &= [0.1253, 0.2878] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \theta^*(u_1) &= \frac{[0.04,0.27]\cdot[0.11,0.28]+[0.34,0.37]\cdot[0.34,0.65]+[0.32,0.45]\cdot[0.15,0.29]+[0.26,0.38]\cdot[0.52,0.58]}{2.2475} \\ &= [0.1349, 0.2968] \end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır.

**Adım 3.** $u \in U$ olmak üzere $s(u)$ değerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$s(u_1) = [0.1253, 0.2878] - [0.1349, 0.2968] = [-0.1715, 0.1529]$

$s(u_2) = [0.2440, 0.3739] - [0.1491, 0.3660] = [-0.1220, 0.2248]$

$s(u_3) = [0.1221, 0.2567] - [0.1076, 0.4239] = [-0.3018, 0.1491]$

$s(u_4) = [0.0706, 0.3657] - [0.1094, 0.3369] = [-0.2663, 0.2563]$

$s(u_5) = [0.2981, 0.3595] - [0.1602, 0.3373] = [-0.0392, 0.1993]$

$s(u_6) = [0.0532, 0.2285] - [0.0973, 0.3547] = [-0.3015, 0.1313]$

**Adım 4.** Karar kümesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\Big\{ {}^{[0.2334,0.8148]}u_1, {}^{[0.3223,0.9436]}u_2, {}^{[0,0.8079]}u_3, {}^{[0.0636,1]}u_4, {}^{[0.4706,0.8980]}u_5, {}^{[0.0005,0.7760]}u_6 \Big\}$$

Burada,

$$d(u_1) = \left[\frac{-0.1715+|-0.3018|}{0.2563+|-0.3018|}, \frac{0.1529+|-0.3018|}{0.2563+|-0.3018|}\right] = [0.2334, 0.8148]$$

biçiminde hesaplanır.

**Adım 5.** "$\leq_{XY}$" tam sıralama bağıntısına göre, adayların performans sıralaması

$$u_6 \prec u_3 \prec u_1 \prec u_4 \prec u_2 \prec u_5$$

biçimindedir. Bu sıralama sonucu, boş pozisyonlar için $u_5$ ve $u_2$ adaylarının diğer adaylardan daha uygun olduğunu göstermektedir. Bu nedenle, $u_5$ ve $u_2$ adayları şirket tarafından ilan edilen pozisyonlar için seçilir.

İkinci olarak, bu bölümde önerilen metodu son teknoloji esnek karar verme metotları (Çağman ve diğerleri, 2010; Kamacı, 2019; Karaaslan, 2016; Sulukan ve diğerleri, 2019) ile karşılaştırabilmek için, yukarıda bahsedilen esnek karar verme problemini modelleyen ve Adım 1'de inşa edilen $f$'nin

$$\begin{aligned} f_{mr} = \; & \Big\{ \Big({}^{0.53}_{0.16}x_1, \Big\{{}^{0.41}_{0.2}u_1, {}^{0.08}_{0.46}u_2, {}^{0.19}_{0.38}u_3, {}^{0.41}_{0.2}u_4\Big\}\Big), \Big({}^{0.57}_{0.36}x_2, \Big\{{}^{0.28}_{0.5}u_1, {}^{0.32}_{0.31}u_2, {}^{0.29}_{0.37}u_3, {}^{0.28}_{0.5}u_4, {}^{1}_{0}u_5, {}^{0.17}_{0.1}u_6\Big\}\Big), \\ & \Big({}^{0.15}_{0.39}x_3, \Big\{{}^{0.45}_{0.22}u_1, {}^{0.31}_{0.49}u_3, {}^{0.45}_{0.22}u_4, {}^{0.2}_{0.51}u_6\Big\}\Big), \Big({}^{0.46}_{0.32}x_4, \Big\{{}^{0}_{0.55}u_1, {}^{1}_{0}u_2, {}^{0.23}_{0.49}u_3, {}^{0}_{0.55}u_4, {}^{0.38}_{0.05}u_5, {}^{0.38}_{0.34}u_6\Big\}\Big)\Big\} \end{aligned}$$

*ifpifs*-kümesi,

$$\begin{aligned} f_{mbr} = \; & \Big\{ \Big({}^{0.69}x_1, \Big\{{}^{0.41}_{0.2}u_1, {}^{0.08}_{0.46}u_2, {}^{0.19}_{0.38}u_3, {}^{0.41}_{0.2}u_4\Big\}\Big), \Big({}^{0.61}x_2, \Big\{{}^{0.28}_{0.5}u_1, {}^{0.32}_{0.31}u_2, {}^{0.29}_{0.37}u_3, {}^{0.28}_{0.5}u_4, {}^{1}_{0}u_5, {}^{0.17}_{0.1}u_6\Big\}\Big), \\ & \Big({}^{0.38}x_3, \Big\{{}^{0.45}_{0.22}u_1, {}^{0.31}_{0.49}u_3, {}^{0.45}_{0.22}u_4, {}^{0.2}_{0.51}u_6\Big\}\Big), \Big({}^{0.57}x_4, \Big\{{}^{0}_{0.55}u_1, {}^{1}_{0}u_2, {}^{0.23}_{0.49}u_3, {}^{0}_{0.55}u_4, {}^{0.38}_{0.05}u_5, {}^{0.38}_{0.34}u_6\Big\}\Big)\Big\} \end{aligned}$$

*fpifs*-kümesi ve

$$\begin{aligned} f_{mb} = \; & \Big\{ \Big({}^{0.69}x_1, \Big\{{}^{0.61}u_1, {}^{0.31}u_2, {}^{0.41}u_3, {}^{0.61}u_4\Big\}\Big), \Big({}^{0.61}x_2, \Big\{{}^{0.39}u_1, {}^{0.5}u_2, {}^{0.46}u_3, {}^{0.39}u_4, {}^{1}u_5, {}^{0.54}u_6\Big\}\Big), \\ & \Big({}^{0.38}x_3, \Big\{{}^{0.62}u_1, {}^{0.41}u_3, {}^{0.62}u_4, {}^{0.35}u_6\Big\}\Big), \Big({}^{0.57}x_4, \Big\{{}^{0.22}u_1, {}^{1}u_2, {}^{0.37}u_3, {}^{0.22}u_4, {}^{0.66}u_5, {}^{0.52}u_6\Big\}\Big)\Big\} \end{aligned}$$

*fpfs*-kümesi inşa edildi.

Üçüncü olarak, $f_{mr}$'ye Metot 1 ve 2, $f_{mbr}$'ye Metot 3 ve $f_{mb}$'ye Metot 4 uygulandı. Tablo 1 ve 2'de önerilen metot ve diğer dört son teknoloji esnek karar verme metodunun karar kümeleri ve adayları performans bakımından sıralama sonuçları verildi. Sonuçlara göre, önerilen metot ve Metot 1 ve 2 boş pozisyonlar için $u_5$ ve $u_2$ adaylarının diğer adaylardan daha uygun olduğuna karar verir. Bu nedenle, bu metotlara göre $u_5$ ve $u_2$ adayları şirket tarafından ilan edilen boş pozisyonlar için seçilir. Diğer taraftan, Metot 3 ve 4 pozisyonlardan biri için $u_2$ adayını önerirken diğer pozisyon için $u_1$ ve $u_4$ adayları arasında seçim yapamaz. Ayrıca, bu beş metot $u_6$ ve $u_3$ adaylarının pozisyonlar için uygun olmadığı konusunda hem fikirdir. Bunun yanısıra, Metot 1, 2, 3 ve 4'ün sıralama sonuçlarına göre $u_1$ ve $u_4$ adaylarının performansları aynı olmasına rağmen, önerilen metot bu iki adayı sıralama yeteneğine sahiptir. Dolayısıyla, önerilen metot ileri belirsizlik içeren bu probleme başarılı bir şekilde uygulanmıştır.

Tablo 1
Önerilen metot ve Metot 1, 2, 3 ve 4'ün adaylar için karar kümeleri

| Metotlar | Karar kümeleri |
|---|---|
| Önerilen metot | $\left\{{}^{[0.2334,0.8148]}u_1, {}^{[0.3223,0.9436]}u_2, {}^{[0,0.8079]}u_3, {}^{[0.0636,1]}u_4, {}^{[0.4706,0.8980]}u_5, {}^{[0.0005,0.7760]}u_6\right\}$ |
| Metot 1 | $\left\{{}^{0.8518}u_1, {}^{0.9565}u_2, {}^{0.7667}u_3, {}^{0.8518}u_4, {}^{1}u_5, {}^{0.6593}u_6\right\}$ |
| Metot 2 | $\left\{{}^{[0.3866,0.6096]}_{[0.0001,0.0019]}u_1, {}^{[0.5772,0.7626]}_{0}u_2, {}^{[0.3600,0.5322]}_{[0.0004,0.0057]}u_3, {}^{[0.3866,0.6096]}_{[0.0001,0.0019]}u_4, {}^{[0.6452,0.7330]}_{0}u_5, {}^{[0.2771,0.4197]}_{[0.0002,0.0036]}u_6\right\}$ |
| Metot 3 | $\left\{{}^{0.7792}u_1, {}^{1}u_2, {}^{0.5114}u_3, {}^{0.7792}u_4, {}^{0.6957}u_5, {}^{0}u_6\right\}$ |
| Metot 4 | $\left\{{}^{0.9365}u_1, {}^{1}u_2, {}^{0.8543}u_3, {}^{0.9365}u_4, {}^{0.9057}u_5, {}^{0.6969}u_6\right\}$ |

Tablo 2
Önerilen metot ve Metot 1, 2, 3 ve 4 için adayların performans sıralamaları

| Metotlar | Yapılar | Adayların performans sıralamaları |
|---|---|---|
| Önerilen metot | *d*-küme | $u_6 \prec u_3 \prec u_1 \prec u_4 \prec u_2 \prec u_5$ |
| Metot 1 | *ifpifs*-küme | $u_6 \prec u_3 \prec u_1 = u_4 \prec u_2 \prec u_5$ |
| Metot 2 | *ifpifs*-küme | $u_6 \prec u_3 \prec u_1 = u_4 \prec u_2 \prec u_5$ |
| Metot 3 | *fpifs*-küme | $u_6 \prec u_3 \prec u_5 \prec u_1 = u_4 \prec u_2$ |
| Metot 4 | *fpfs*-küme | $u_6 \prec u_3 \prec u_5 \prec u_1 = u_4 \prec u_2$ |

### 4.2. Gürültü Kaldırmada Kullanılan Bazı Filtrelere Performans Temelli Değer Atama Problemine Bir Uygulama

Bu alt bölümde, önerilen metot ve Bölüm 2'de bahsedilen dört son teknoloji esnek karar verme metodu gürültü kaldırmada kullanılan ve

- Piksel yoğunluğuna bağlı filtre (BPDF) (Erkan ve Gökrem, 2018)
- Modifiye karar tabanlı asimetrik kırpılmış medyan filtre (MDBUTMF) (Esakkirajan, Veerakumar, Subramanyam ve PremChand, 2011)
- Karar tabanlı algoritma (DBA) (Pattnaik, Agarwal ve Chand, 2012)
- Gürültü uyarlamalı bulanık değiştirmeli medyan filtre (NAFSMF) (Toh ve Isa, 2010)
- Farklı uygulamalı medyan filtre (DAMF) (Erkan, Gökrem ve Enginoğlu, 2018)
- Uyarlanabilir ağırlıklı ortalama filtre (AWMF) (Tang, Yang, Liu ve Pei, 2016)
- Uyarlanabilir Riesz ortalama filtre (ARmF) (Enginoğlu, Erkan ve Memiş, 2019)

olarak adlandırılan yedi filtre için performans temelli değer atamaya ilişkin bir gerçek probleme uygulandı. Bu problemde, $u_1$ = "BPDF", $u_2$ = "MDBUTMF", $u_3$ = "DBA", $u_4$ = "NAFSMF", $u_5$ = "DAMF", $u_6$ = "AWMF" ve $u_7$ = "ARmF" olmak üzere $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ alternatiflerin kümesini temsil etmektedir. Ayrıca, $x_1$ = "%10 *gürültü yoğunluğu*", $x_2$ = "%20 *gürültü yoğunluğu*", $x_3$ = "%30 *gürültü yoğunluğu*", $x_4$ = "%40 *gürültü yoğunluğu*", $x_5$ = "%50 *gürültü yoğunluğu*", $x_6$ = "%60 *gürültü yoğunluğu*", $x_7$ = "%70 *gürültü yoğunluğu*", $x_8$ = "%80 *gürültü yoğunluğu*" ve $x_9$ = "%90 *gürültü yoğunluğu*" olmak üzere $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ karar verici tarafından belirlenen parametre kümesini göstermektedir.

Bu problemde, söz konusu filtreleri performansları bakımından sıralaması istenen uzmanlara kolaylık sağlamak amacıyla, "Kameraman", "Lena", "Jet Uçağı" ve "Babun" olarak isimlendirilen dört geleneksel görüntü göz önüne alındı. Böylece, uzmanların kararları ile metotların sonuçları karşılaştırılabildi. Bu amaçla, bu görüntüler için %10'dan %90'a değişen gürültü yoğunluklarında filtrelerin yapısal benzerlik (SSIM) (Wang, Bovik, Sheikh ve Simoncelli, 2004) yoluyla elde edilen sonuçları (Enginoğlu, Erkan ve Memiş, 2019) Tablo 3 ve 4'te verildi. Ayrıca, bu tablodaki koyu renkli değerler, filtrelerin en iyi skor değerlerini göstermektedir.

Tablo 3
Kameraman ve Lena görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları

| | **Filtreler** | **%10** | **%20** | **%30** | **%40** | **%50** | **%60** | **%70** | **%80** | **%90** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Kameraman** | **BPDF** | 0.9910 | 0.9783 | 0.9588 | 0.9306 | 0.8934 | 0.8406 | 0.7700 | 0.6665 | 0.4990 |
| | **MDBUTMF** | 0.9897 | 0.9278 | 0.7945 | 0.7964 | 0.8844 | 0.9158 | 0.8962 | 0.8056 | 0.4451 |
| | **DBA** | 0.9938 | 0.9847 | 0.9710 | 0.9520 | 0.9222 | 0.8843 | 0.8283 | 0.7584 | 0.6645 |
| | **NAFSMF** | 0.9798 | 0.9636 | 0.9484 | 0.9329 | 0.9164 | 0.8954 | 0.8696 | 0.8335 | 0.7288 |
| | **DAMF** | 0.9960 | 0.9906 | 0.9833 | 0.9749 | 0.9638 | 0.9492 | 0.9293 | 0.8973 | 0.8294 |
| | **AWMF** | 0.9872 | 0.9839 | 0.9798 | 0.9748 | 0.9667 | 0.9541 | 0.9345 | 0.9015 | 0.8346 |
| | **ARmF** | **0.9969** | **0.9933** | **0.9885** | **0.9824** | **0.9735** | **0.9600** | **0.9395** | **0.9059** | **0.8376** |
| **Lena** | **BPDF** | 0.9834 | 0.9647 | 0.9400 | 0.9085 | 0.8649 | 0.8075 | 0.7213 | 0.5441 | 0.2861 |
| | **MDBUTMF** | 0.9845 | 0.9341 | 0.8302 | 0.8205 | 0.8734 | 0.8840 | 0.8515 | 0.7515 | 0.3774 |
| | **DBA** | 0.9867 | 0.9705 | 0.9499 | 0.9219 | 0.8862 | 0.8389 | 0.7748 | 0.6909 | 0.5701 |
| | **NAFSMF** | 0.9831 | 0.9657 | 0.9473 | 0.9274 | 0.9046 | 0.8791 | 0.8471 | 0.8009 | 0.6900 |
| | **DAMF** | 0.9897 | 0.9783 | 0.9645 | 0.9478 | 0.9285 | 0.9055 | 0.8751 | 0.8340 | 0.7611 |
| | **AWMF** | 0.9811 | 0.9727 | 0.9622 | 0.9484 | 0.9319 | 0.9108 | 0.8805 | 0.8387 | 0.7675 |
| | **ARmF** | **0.9906** | **0.9806** | **0.9690** | **0.9545** | **0.9374** | **0.9155** | **0.8846** | **0.8416** | **0.7693** |

Tablo 4
Jet uçağı ve babun görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları

| | Filtreler | %10 | %20 | %30 | %40 | %50 | %60 | %70 | %80 | %90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Jet Uçağı** | **BPDF** | 0.9883 | 0.9729 | 0.9496 | 0.9205 | 0.8773 | 0.8139 | 0.7216 | 0.5440 | 0.1615 |
| | **MDBUTMF** | 0.9868 | 0.9112 | 0.7611 | 0.7644 | 0.8558 | 0.8956 | 0.8717 | 0.7609 | 0.3449 |
| | **DBA** | 0.9875 | 0.9753 | 0.9581 | 0.9338 | 0.8997 | 0.8564 | 0.7952 | 0.7121 | 0.5915 |
| | **NAFSMF** | 0.9843 | 0.9677 | 0.9497 | 0.9305 | 0.9109 | 0.8866 | 0.8562 | 0.8159 | 0.7067 |
| | **DAMF** | 0.9937 | 0.9856 | 0.9756 | 0.9633 | 0.9493 | 0.9293 | 0.9050 | 0.8669 | 0.7943 |
| | **AWMF** | 0.9846 | 0.9785 | 0.9717 | 0.9630 | 0.9517 | 0.9342 | 0.9097 | 0.8715 | 0.7995 |
| | **ARmF** | **0.9945** | **0.9882** | **0.9808** | **0.9710** | **0.9590** | **0.9406** | **0.9152** | **0.8758** | **0.8022** |
| **Babun** | **BPDF** | 0.9794 | 0.9497 | 0.9090 | 0.8538 | 0.7778 | 0.6814 | 0.5584 | 0.3808 | 0.1039 |
| | **MDBUTMF** | 0.9700 | 0.9212 | 0.8490 | 0.8140 | 0.8057 | 0.7720 | 0.7128 | 0.6051 | 0.3074 |
| | **DBA** | 0.9827 | 0.9593 | 0.9265 | 0.8796 | 0.8152 | 0.7341 | 0.6309 | 0.4980 | 0.3521 |
| | **NAFSMF** | 0.9610 | 0.9192 | 0.8752 | 0.8275 | 0.7736 | 0.7170 | 0.6500 | 0.5660 | 0.4406 |
| | **DAMF** | 0.9883 | 0.9738 | 0.9559 | 0.9342 | 0.9058 | 0.8716 | 0.8213 | 0.7424 | 0.5946 |
| | **AWMF** | 0.9717 | 0.9599 | 0.9475 | 0.9328 | 0.9110 | 0.8805 | 0.8311 | 0.7508 | 0.6019 |
| | **ARmF** | **0.9914** | **0.9811** | **0.9682** | **0.9517** | **0.9277** | **0.8944** | **0.8427** | **0.7594** | **0.6065** |

Bu problemde, ilk olarak, parametrelere göre filtrelerin *ivif*-değerleri

$$\omega_x(u) = \left[\frac{\min\limits_n (\mu_u^x)_n}{\max\limits_n (\mu_u^x)_n + \max\limits_n\{1-(\mu_u^x)_n\}}, \frac{\max\limits_n (\mu_u^x)_n}{\max\limits_n (\mu_u^x)_n + \max\limits_n\{1-(\mu_u^x)_n\}}\right]$$

ve

$$\theta_x(u) = \left[\frac{\min\limits_n\{1-(\mu_u^x)_n\}}{\max\limits_n (\mu_u^x)_n + \max\limits_n\{1-(\mu_u^x)_n\}}, \frac{\max\limits_n\{1-(\mu_u^x)_n\}}{\max\limits_n (\mu_u^x)_n + \max\limits_n\{1-(\mu_u^x)_n\}}\right]$$

ile tanımlanan üye olma ve üye olmama fonksiyonları yoluyla elde edildi. Burada, $((\mu_u^x)_n)$ notasyonu $u$ filtresi ve $x$ gürültü yoğunluğu için $n$'inci görüntüden elde edilen SSIM sonuçlarını gösteren bir sıralı $s$-lidir. Ayrıca, görüntülerin sırası kameraman, Lena, jet uçağı ve babun biçimindedir.

Örneğin, %10 gürültü yoğunluğunda dört geleneksel görüntünün DBA filtresinden elde edilen SSIM sonuçları olan $((\mu_{u_3}^{x_1})_n) = (0.9938, 0.9867, 0.9875, 0.9827)$ göz önüne alınsın. O halde, $x_1$ parametresine göre $u_3$ filtresinin üye olma derecesi

$$\begin{aligned}\omega_{x_1}(u_3) &= \left[\frac{\min\limits_n (\mu_{u_3}^{x_1})_n}{\max\limits_n (\mu_{u_3}^{x_1})_n + \max\limits_n\{1-(\mu_{u_3}^{x_1})_n\}}, \frac{\max\limits_n (\mu_{u_3}^{x_1})_n}{\max\limits_n (\mu_{u_3}^{x_1})_n + \max\limits_n\{1-(\mu_{u_3}^{x_1})_n\}}\right] \\ &= \left[\frac{0.9827}{0.9938+0.0173}, \frac{0.9938}{0.9938+0.0173}\right] \\ &= [0.9719, 0.9829]\end{aligned}$$

ve üye olmama derecesi

$$
\begin{aligned}
\theta_{x_1}(u_3) = &\ \left[\frac{\min\limits_{n}\{1-(\mu^{x_1}_{u_3})_n\}}{\max\limits_{n}(\mu^{x_1}_{u_3})_n+\max\limits_{n}\{1-(\mu^{x_1}_{u_3})_n\}},\frac{\max\limits_{n}\{1-(\mu^{x_1}_{u_3})_n\}}{\max\limits_{n}(\mu^{x_1}_{u_3})_n+\max\limits_{n}\{1-(\mu^{x_1}_{u_3})_n\}}\right]\\
= &\ \left[\frac{0.0062}{0.9938+0.0173},\frac{0.0173}{0.9938+0.0173}\right]\\
= &\ [0.0061,0.0171]
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde, diğer filtrelerin *ivif*-değerleri hesaplanabilir.

Ayrıca, bu problemde, filtrelerin gürültü giderme performanslarının, gürültülü piksellerin bozulmamış piksellerden daha fazla olduğu yüksek gürültü yoğunluklarında daha önemli olduğunu varsayılmaktadır. Dolayısıyla, yüksek gürültü yoğunluklarındaki performans temelli başarı diğer yoğunluklardan daha önemli olacaktır.

$$
\kappa=\left\{\genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.01]}{[0.9,0.95]}x_1,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.05]}{[0.85,0.9]}x_2,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.1]}{[0.8,0.85]}x_3,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.05,0.35]}{[0.25,0.5]}x_4,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2,0.45]}{[0.2,0.45]}x_5,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.25,0.5]}{[0.05,0.35]}x_6,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8,0.85]}{[0,0.1]}x_7,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.85,0.9]}{[0,0.05]}x_8,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9,0.95]}{[0,0.01]}x_9\right\}
$$

olsun. Böylece, yukarıda bahsedilen problemi modelleyen $f$ $d$-kümesi ve $f_{mr}$, $f_{mbr}$ ve $f_{mb}$ aşağıdaki gibi elde edildi.

$$
\begin{aligned}
f = &\ \Big\{\Big(\genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.01]}{[0.9,0.95]}x_1,\Big\{\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9682,0.9796]}{[0.0089,0.0204]}u_1,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9513,0.9706]}{[0.0101,0.0294]}u_2,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9719,0.9829]}{[0.0061,0.0171]}u_3,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9391,0.9619]}{[0.0153,0.0381]}u_4,\\
&\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9807,0.9884]}{[0.0040,0.0116]}u_5,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9569,0.9721]}{[0.0126,0.0279]}u_6,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9844,0.9907]}{[0.0031,0.0093]}u_7\Big\}\Big),\Big(\genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.05]}{[0.85,0.9]}x_2,\Big\{\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9233,0.9511]}{[0.0211,0.0489]}u_1,\\
&\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8908,0.9132]}{[0.0644,0.0868]}u_2,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9355,0.9603]}{[0.0149,0.0397]}u_3,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8767,0.9229]}{[0.0308,0.0771]}u_4,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9577,0.9742]}{[0.0092,0.0258]}u_5,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9374,0.9608]}{[0.0157,0.0392]}u_6,\\
&\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9683,0.9808]}{[0.0066,0.0192]}u_7\Big\}\Big),\Big(\genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.1]}{[0.8,0.85]}x_3,\Big\{\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8659,0.9133]}{[0.0392,0.0867]}u_1,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.6996,0.7804]}{[0.1388,0.2196]}u_2,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8870,0.9296]}{[0.0278,0.0704]}u_3,\\
&\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8145,0.8839]}{[0.0468,0.1161]}u_4,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9304,0.9571]}{[0.0163,0.0429]}u_5,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9179,0.9491]}{[0.0196,0.0509]}u_6,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9489,0.9688]}{[0.0113,0.0312]}u_7\Big\}\Big),\Big(\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.05,0.35]}{[0.25,0.5]}x_4,\\
&\ \Big\{\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.7929,0.8642]}{[0.0645,0.1358]}u_1,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.7238,0.7769]}{[0.1700,0.2231]}u_2,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8202,0.8877]}{[0.0448,0.1123]}u_3,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.7486,0.8439]}{[0.0607,0.1561]}u_4,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8977,0.9368]}{[0.0241,0.0632]}u_5,\\
&\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8952,0.9355]}{[0.0242,0.0645]}u_6,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9234,0.9531]}{[0.0171,0.0469]}u_7\Big\}\Big),\Big(\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2,0.45]}{[0.2,0.45]}x_5,\Big\{\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.6972,0.8008]}{[0.0956,0.1992]}u_1,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.7469,0.8199]}{[0.1072,0.1801]}u_2,\\
&\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.7364,0.8331]}{[0.0703,0.1669]}u_3,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.6769,0.8019]}{[0.0732,0.1981]}u_4,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8561,0.9110]}{[0.0342,0.0890]}u_5,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8629,0.9157]}{[0.0315,0.0843]}u_6,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8871,0.9309]}{[0.0253,0.0691]}u_7\Big\}\Big),\\
&\ \Big(\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.25,0.5]}{[0.05,0.35]}x_6,\Big\{\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.5878,0.7252]}{[0.1375,0.2748]}u_1,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.6749,0.8007]}{[0.0736,0.1993]}u_2,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.6382,0.7688]}{[0.1006,0.2312]}u_3,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.6085,0.7598]}{[0.0888,0.2402]}u_4,\\
&\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8088,0.8808]}{[0.0471,0.1192]}u_5,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8201,0.8887]}{[0.0428,0.1113]}u_6,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8393,0.9009]}{[0.0375,0.0991]}u_7\Big\}\Big),\Big(\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.8,0.85]}{[0,0.1]}x_7,\Big\{\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.4609,0.6355]}{[0.1898,0.3645]}u_1,\\
&\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.6023,0.7573]}{[0.0877,0.2427]}u_2,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.5269,0.6917]}{[0.1434,0.3083]}u_3,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.5330,0.7130]}{[0.1069,0.2870]}u_4,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.7412,0.8387]}{[0.0638,0.1613]}u_5,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.7532,0.8469]}{[0.0594,0.1531]}u_6,\\
&\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.7683,0.8566]}{[0.0552,0.1434]}u_7\Big\}\Big),\Big(\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.85,0.9]}{[0,0.05]}x_8,\Big\{\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2962,0.5184]}{[0.2594,0.4816]}u_1,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.5040,0.6711]}{[0.1619,0.3289]}u_2,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3951,0.6017]}{[0.1917,0.3983]}u_3,\\
&\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.4465,0.6576]}{[0.1314,0.3424]}u_4,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.6428,0.7770]}{[0.0889,0.2230]}u_5,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.6525,0.7834]}{[0.0856,0.2166]}u_6,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.6624,0.7901]}{[0.0821,0.2099]}u_7\Big\}\Big),\Big(\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.9,0.95]}{[0,0.01]}x_9,\\
&\ \Big\{\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.0745,0.3577]}{[0.3591,0.6423]}u_1,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2702,0.3912]}{[0.4877,0.6088]}u_2,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2683,0.5063]}{[0.2556,0.4937]}u_3,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3420,0.5658]}{[0.2105,0.4342]}u_4,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.4815,0.6717]}{[0.1382,0.3283]}u_5,\\
&\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.4883,0.6771]}{[0.1342,0.3229]}u_6,\genfrac{}{}{0pt}{}{[0.4926,0.6804]}{[0.1319,0.3196]}u_7\Big\}\Big)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} f_{mr} = \quad & \Big\{ \big( {}^{0.005}_{0.925}x_1, \big\{ {}^{0.9739}_{0.0146}u_1, {}^{0.9609}_{0.0198}u_2, {}^{0.9774}_{0.0116}u_3, {}^{0.9505}_{0.0267}u_4, {}^{0.9846}_{0.0078}u_5, {}^{0.9645}_{0.0202}u_6, {}^{0.9875}_{0.0062}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.025}_{0.875}x_2, \big\{ {}^{0.9372}_{0.0350}u_1, {}^{0.9020}_{0.0756}u_2, {}^{0.9479}_{0.0273}u_3, {}^{0.8998}_{0.0539}u_4, {}^{0.9660}_{0.0175}u_5, {}^{0.9491}_{0.0274}u_6, {}^{0.9746}_{0.0129}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.05}_{0.825}x_3, \big\{ {}^{0.8896}_{0.0630}u_1, {}^{0.7400}_{0.1792}u_2, {}^{0.9083}_{0.0491}u_3, {}^{0.8492}_{0.0815}u_4, {}^{0.9437}_{0.0296}u_5, {}^{0.9335}_{0.0352}u_6, {}^{0.9589}_{0.0212}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.2}_{0.375}x_4, \big\{ {}^{0.8286}_{0.1001}u_1, {}^{0.7504}_{0.1965}u_2, {}^{0.8540}_{0.0785}u_3, {}^{0.7963}_{0.1084}u_4, {}^{0.9172}_{0.0437}u_5, {}^{0.9154}_{0.0443}u_6, {}^{0.9382}_{0.0320}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.325}_{0.325}x_5, \big\{ {}^{0.7490}_{0.1474}u_1, {}^{0.7834}_{0.1436}u_2, {}^{0.7847}_{0.1186}u_3, {}^{0.7394}_{0.1356}u_4, {}^{0.8836}_{0.0616}u_5, {}^{0.8893}_{0.0579}u_6, {}^{0.9090}_{0.0472}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.375}_{0.2}x_6, \big\{ {}^{0.6565}_{0.2062}u_1, {}^{0.7378}_{0.1365}u_2, {}^{0.7035}_{0.1659}u_3, {}^{0.6841}_{0.1645}u_4, {}^{0.8448}_{0.0831}u_5, {}^{0.8544}_{0.0770}u_6, {}^{0.8701}_{0.0683}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.825}_{0.05}x_7, \big\{ {}^{0.5482}_{0.2772}u_1, {}^{0.6798}_{0.1652}u_2, {}^{0.6093}_{0.2258}u_3, {}^{0.6230}_{0.1969}u_4, {}^{0.7900}_{0.1125}u_5, {}^{0.8001}_{0.1062}u_6, {}^{0.8125}_{0.0993}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.875}_{0.025}x_8, \big\{ {}^{0.4073}_{0.3705}u_1, {}^{0.5875}_{0.2454}u_2, {}^{0.4984}_{0.2950}u_3, {}^{0.5521}_{0.2369}u_4, {}^{0.7099}_{0.1560}u_5, {}^{0.7180}_{0.1511}u_6, {}^{0.7263}_{0.1460}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.925}_{0.005}x_9, \big\{ {}^{0.2161}_{0.5007}u_1, {}^{0.3307}_{0.5483}u_2, {}^{0.3873}_{0.3747}u_3, {}^{0.4539}_{0.3224}u_4, {}^{0.5766}_{0.2332}u_5, {}^{0.5827}_{0.2286}u_6, {}^{0.5865}_{0.2258}u_7 \big\} \big) \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{mbr} = \quad & \Big\{ \big( {}^{0.04}x_1, \big\{ {}^{0.9739}_{0.0146}u_1, {}^{0.9609}_{0.0198}u_2, {}^{0.9774}_{0.0116}u_3, {}^{0.9505}_{0.0267}u_4, {}^{0.9846}_{0.0078}u_5, {}^{0.9645}_{0.0202}u_6, {}^{0.9875}_{0.0062}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.075}x_2, \big\{ {}^{0.9372}_{0.0350}u_1, {}^{0.9020}_{0.0756}u_2, {}^{0.9479}_{0.0273}u_3, {}^{0.8998}_{0.0539}u_4, {}^{0.9660}_{0.0175}u_5, {}^{0.9491}_{0.0274}u_6, {}^{0.9746}_{0.0129}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.1125}x_3, \big\{ {}^{0.8896}_{0.0630}u_1, {}^{0.7400}_{0.1792}u_2, {}^{0.9083}_{0.0491}u_3, {}^{0.8492}_{0.0815}u_4, {}^{0.9437}_{0.0296}u_5, {}^{0.9335}_{0.0352}u_6, {}^{0.9589}_{0.0212}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.4125}x_4, \big\{ {}^{0.8286}_{0.1001}u_1, {}^{0.7504}_{0.1965}u_2, {}^{0.8540}_{0.0785}u_3, {}^{0.7963}_{0.1084}u_4, {}^{0.9172}_{0.0437}u_5, {}^{0.9154}_{0.0443}u_6, {}^{0.9382}_{0.0320}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.5}x_5, \big\{ {}^{0.7490}_{0.1474}u_1, {}^{0.7834}_{0.1436}u_2, {}^{0.7847}_{0.1186}u_3, {}^{0.7394}_{0.1356}u_4, {}^{0.8836}_{0.0616}u_5, {}^{0.8893}_{0.0579}u_6, {}^{0.9090}_{0.0472}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.5875}x_6, \big\{ {}^{0.6565}_{0.2062}u_1, {}^{0.7378}_{0.1365}u_2, {}^{0.7035}_{0.1659}u_3, {}^{0.6841}_{0.1645}u_4, {}^{0.8448}_{0.0831}u_5, {}^{0.8544}_{0.0770}u_6, {}^{0.8701}_{0.0683}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.8875}x_7, \big\{ {}^{0.5482}_{0.2772}u_1, {}^{0.6798}_{0.1652}u_2, {}^{0.6093}_{0.2258}u_3, {}^{0.6230}_{0.1969}u_4, {}^{0.7900}_{0.1125}u_5, {}^{0.8001}_{0.1062}u_6, {}^{0.8125}_{0.0993}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.925}x_8, \big\{ {}^{0.4073}_{0.3705}u_1, {}^{0.5875}_{0.2454}u_2, {}^{0.4984}_{0.2950}u_3, {}^{0.5521}_{0.2369}u_4, {}^{0.7099}_{0.1560}u_5, {}^{0.7180}_{0.1511}u_6, {}^{0.7263}_{0.1460}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.96}x_9, \big\{ {}^{0.2161}_{0.5007}u_1, {}^{0.3307}_{0.5483}u_2, {}^{0.3873}_{0.3747}u_3, {}^{0.4539}_{0.3224}u_4, {}^{0.5766}_{0.2332}u_5, {}^{0.5827}_{0.2286}u_6, {}^{0.5865}_{0.2258}u_7 \big\} \big) \Big\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_{mb} = \quad & \Big\{ \big( {}^{0.04}x_1, \big\{ {}^{0.9796}u_1, {}^{0.9706}u_2, {}^{0.9829}u_3, {}^{0.9619}u_4, {}^{0.9884}u_5, {}^{0.9721}u_6, {}^{0.9907}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.075}x_2, \big\{ {}^{0.9511}u_1, {}^{0.9132}u_2, {}^{0.9603}u_3, {}^{0.9229}u_4, {}^{0.9742}u_5, {}^{0.9608}u_6, {}^{0.9808}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.1125}x_3, \big\{ {}^{0.9133}u_1, {}^{0.7804}u_2, {}^{0.9296}u_3, {}^{0.8839}u_4, {}^{0.9571}u_5, {}^{0.9491}u_6, {}^{0.9688}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.4125}x_4, \big\{ {}^{0.8642}u_1, {}^{0.7769}u_2, {}^{0.8877}u_3, {}^{0.8439}u_4, {}^{0.9368}u_5, {}^{0.9355}u_6, {}^{0.9531}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.5}x_5, \big\{ {}^{0.8008}u_1, {}^{0.8199}u_2, {}^{0.8331}u_3, {}^{0.8019}u_4, {}^{0.9110}u_5, {}^{0.9157}u_6, {}^{0.9309}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.5875}x_6, \big\{ {}^{0.7252}u_1, {}^{0.8007}u_2, {}^{0.7688}u_3, {}^{0.7598}u_4, {}^{0.8808}u_5, {}^{0.8887}u_6, {}^{0.9009}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.8875}x_7, \big\{ {}^{0.6355}u_1, {}^{0.7573}u_2, {}^{0.6917}u_3, {}^{0.7130}u_4, {}^{0.8387}u_5, {}^{0.8469}u_6, {}^{0.8566}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.925}x_8, \big\{ {}^{0.5184}u_1, {}^{0.6711}u_2, {}^{0.6017}u_3, {}^{0.6576}u_4, {}^{0.7770}u_5, {}^{0.7834}u_6, {}^{0.7901}u_7 \big\} \big), \\
& \big( {}^{0.96}x_9, \big\{ {}^{0.3577}u_1, {}^{0.3912}u_2, {}^{0.5063}u_3, {}^{0.5658}u_4, {}^{0.6717}u_5, {}^{0.6771}u_6, {}^{0.6804}u_7 \big\} \big) \Big\} \end{aligned}$$

İkinci olarak, $f$'ye önerilen metot, $f_{mr}$'ye Metot 1 ve 2, $f_{mbr}$'ye Metot 3 ve $f_{mb}$'ye Metot 4 uygulandı. Tablo 5 ve 6'da bu metotlar için filtrelerin karar kümeleri ve performans sıralamaları verildi. Tablo 3 ve 4'teki değerlere dayanarak, filtrelerin uzmanlar tarafından önerilen performans sıralama sonucu önerilen metot ve Metot 3 ve 4 aracılığıyla elde edildi. Diğer bir ifadeyle, önerilen metot dört görüntüyü göz önünde bulundurarak yedi filtrenin geçerli bir sıralamasını üretmiştir. Bu durum, metodun daha fazla sayıda görüntü için de uygulandığında geçerli bir sıralama vereceğini desteklemektedir. Diğer taraftan, Metot 1 ve 2 "ARmF diğer filtrelerden daha iyi performans gösterir." şeklinde karar vermesine rağmen bu iki metodun uzmanlar tarafından elde edilen sıralamadan faklı bir sıralama ürettikleri gözlemlenir. Sonuç olarak, yukarıdaki tartışma, önerilen metodun performans bakımından alternatifleri sıralayabilmek için performans temelli değer atama problemlerine başarılı bir şekilde uygulanabildiğini göstermektedir.

Tablo 5
Önerilen metot ve Metot 1, 2, 3 ve 4'ün filtreler için karar kümeleri

| Metotlar | Karar kümeleri |
|---|---|
| Önerilen Metot | $\left\{{}^{[0.2799,0.7496]}\text{BPDF}, {}^{[0.3680,0.7824]}\text{MDBUTMF}, {}^{[0.3834,0.8351]}\text{DBA}, {}^{[0.3749,0.8460]}\text{NAFSMF}, {}^{[0.5872,0.9817]}\text{DAMF}, {}^{[0.5870,0.9834]}\text{AWMF}, {}^{[0.6145,1]}\text{ARmF}\right\}$ |
| Metot 1 | $\left\{{}^{0.9021}\text{BPDF}, {}^{0.8689}\text{MDBUTMF}, {}^{0.9413}\text{DBA}, {}^{0.9142}\text{NAFSMF}, {}^{0.9901}\text{DAMF}, {}^{0.9827}\text{AWMF}, {}^{1}\text{ARmF}\right\}$ |
| Metot 2 | $\left\{{}^{[0.8754,0.9823]}_{0}\text{BPDF}, {}^{[0.9364,0.9925]}_{0}\text{MDBUTMF}, {}^{[0.9241,0.9912]}_{0}\text{DBA}, {}^{[0.9355,0.9917]}_{0}\text{NAFSMF}, {}^{[0.9773,0.9988]}_{0}\text{DAMF}, {}^{[0.9787,0.9989]}_{0}\text{AWMF}, {}^{[0.9804,0.9991]}_{0}\text{ARmF}\right\}$ |
| Metot 3 | $\left\{{}^{0.5233}\text{BPDF}, {}^{0.6613}\text{MDBUTMF}, {}^{0.6822}\text{DBA}, {}^{0.7215}\text{NAFSMF}, {}^{0.9672}\text{DAMF}, {}^{0.9782}\text{AWMF}, {}^{1}\text{ARmF}\right\}$ |
| Metot 4 | $\left\{{}^{0.7413}\text{BPDF}, {}^{0.8162}\text{MDBUTMF}, {}^{0.8276}\text{DBA}, {}^{0.8488}\text{NAFSMF}, {}^{0.9822}\text{DAMF}, {}^{0.9882}\text{AWMF}, {}^{1}\text{ARmF}\right\}$ |

Tablo 6
Önerilen metot ve Metot 1, 2, 3 ve 4 için filtrelerin performans sıralamaları

| Metotlar | Yapılar | Filtrelerin performans sıralamaları |
|---|---|---|
| Önerilen Metot | *d*-küme | BPDF $\prec$ MDBUTMF $\prec$ DBA $\prec$ NAFSMF $\prec$ DAMF $\prec$ AWMF $\prec$ **ARmF** |
| Metot 1 | *ifpifs*-küme | MDBUTMF $\prec$ BPDF $\prec$ NAFSMF $\prec$ DBA $\prec$ AWMF $\prec$ DAMF $\prec$ **ARmF** |
| Metot 2 | *ifpifs*-küme | BPDF $\prec$ DBA $\prec$ NAFSMF $\prec$ MDBUTMF $\prec$ DAMF $\prec$ AWMF $\prec$ **ARmF** |
| Metot 3 | *fpifs*-küme | BPDF $\prec$ MDBUTMF $\prec$ DBA $\prec$ NAFSMF $\prec$ DAMF $\prec$ AWMF $\prec$ **ARmF** |
| Metot 4 | *fpfs*-küme | BPDF $\prec$ MDBUTMF $\prec$ DBA $\prec$ NAFSMF $\prec$ DAMF $\prec$ AWMF $\prec$ **ARmF** |

# BÖLÜM 5
# ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK PARAMETRELİ ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK ESNEK MATRİSLER

Bu bölümde, aralık değerli sezgisel bulanık parametreli aralık değerli sezgisel bulanık esnek matris kavramı tanımlandı ve bu kavramın bazı temel özellikleri incelendi. Bu bölümün temel amacı, bu kavram aracılığıyla, yüksek sayıda veri ve çoklu ölçüm sonuçları içeren karar verme problemlerindeki verilerin bilgisayar ortamına aktarılmasını sağlamaktır. Ayrıca, $d$-kümelerin bu tür problemleri modelleme becerilerini geliştirerek etkili esnek karar verme yöntemleri önermektir.

Bu bölüm boyunca, $E$ parametrelerin bir kümesini ve $U$ bir evrensel kümeyi göstermektedir.

**Tanım 5.1.** $f \in D_E(U)$ olsun. O halde, $i \in \{0,1,2,\cdots\}$ ve $j \in \{1,2,\cdots\}$ için,

$$a_{ij} := \begin{cases} {}^{\alpha(x_j)}_{\beta(x_j)}, & i = 0 \\ f({}^{\alpha(x_j)}_{\beta(x_j)}x_j)(u_i), & i \neq 0 \end{cases} \quad \text{veya kısaca} \quad a_{ij} := {}^{\alpha_{ij}}_{\beta_{ij}}$$

ile tanımlı

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{01} & a_{02} & a_{03} & \dots & a_{0n} & \dots \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

matrisine $f$'nin $d$-matrisi denir.

Burada, $\alpha_{ij} := [\alpha_{ij}^-, \alpha_{ij}^+]$ ve $\beta_{ij} := [\beta_{ij}^-, \beta_{ij}^+]$ olmak üzere her $i$ ve $j$ için, $\alpha_{ij}^+ + \beta_{ij}^+ \leq 1$ biçimindedir. Ayrıca, $f \in D_E(U)$ için, eğer $|U| = m-1$ ve $|E| = n$ ise, $f$, $m \times n$ tipinde bir $d$-matristir.

Bu çalışma boyunca, $U$ üzerinde $E$ yoluyla parametrize edilmiş tüm $d$-matrislerin kümesi $D_E[U]$ ile gösterilmektedir ve $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in D_E[U]$. Ayrıca, bir karışıklığa neden olmadığı sürece, $a_{ij}$'nin $\alpha_{ij}$ üye olma ve $\beta_{ij}$ üye olmama dereceleri $\alpha_{ij}^a$ ve $\beta_{ij}^a$ ile gösterilmektedir.

Bir $[a_{ij}]_{m\times n}$ $d$-matrisinin girdileri *ivif*-değerlerden oluşur. Sıfır indisli satırlarının girdileri herbir parametrenin üye olma ve üye olmama derecelerini içerir. Örneğin, $a_{01} := {}^{\alpha_{01}}_{\beta_{01}}$ ile tanımlanan $a_{01}$ girdisi için $\alpha_{01}$ ve $\beta_{01}$ değerleri, sırasıyla, birinci parametrenin üye olma ve üye olmama derecelerini gösterir. Ayrıca, diğer saırların girdileri herbir parametreye karşılık gelen bir alternatifin üye olma ve üye olmama derecelerini içerir. Örneğin, $a_{32} := {}^{\alpha_{32}}_{\beta_{32}}$ ile tanımlanan $a_{32}$ girdisi için $\alpha_{32}$ ve $\beta_{32}$ değerleri, sırasıyla, üçüncü parametreye karşılık gelen ikinci alternatifin üye olma ve üye olmama derecelerini gösterir.

**Örnek 5.2.** $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
f = \; & \Big\{ \Big( {}^{[0.1,0.4]}_{[0.4,0.5]}x_1, \Big\{ {}^{[0.4,0.6]}_{[0.2,0.3]}u_1, {}^{[0.7,0.8]}_{[0,0.1]}u_2, {}^{[0.1,0.4]}_{[0,0.2]}u_4 \Big\} \Big), \Big( {}^{0}_{1}x_2, \Big\{ {}^{[0,0.5]}_{[0.1,0.2]}u_3, {}^{[0.3,0.5]}_{[0.2,0.3]}u_5 \Big\} \Big), \\
& ({}^{0}_{1}x_3, 1_U), \Big( {}^{[0.2,0.5]}_{[0.1,0.2]}x_4, \Big\{ {}^{[0.3,0.4]}_{[0.5,0.6]}u_2, {}^{[0,0.2]}_{[0.5,0.6]}u_4, {}^{[0.3,0.7]}_{[0.1,0.2]}u_5 \Big\} \Big) \Big\}
\end{aligned}
$$

$d$-kümesi verilsin. O halde, $f$'nin $d$-matrisi

$$
[a_{ij}] = \begin{bmatrix}
{}^{[0.1,0.4]}_{[0.4,0.5]} & {}^{0}_{1} & {}^{0}_{1} & {}^{[0.2,0.5]}_{[0.1,0.2]} \\
{}^{[0.4,0.6]}_{[0.2,0.3]} & {}^{0}_{1} & {}^{1}_{0} & {}^{0}_{1} \\
{}^{[0.7,0.8]}_{[0,0.1]} & {}^{0}_{1} & {}^{1}_{0} & {}^{[0.3,0.4]}_{[0.5,0.6]} \\
{}^{0}_{1} & {}^{[0,0.5]}_{[0.1,0.2]} & {}^{1}_{0} & {}^{0}_{1} \\
{}^{[0.1,0.4]}_{[0,0.2]} & {}^{0}_{1} & {}^{1}_{0} & {}^{[0,0.2]}_{[0.5,0.6]} \\
{}^{0}_{1} & {}^{[0.3,0.5]}_{[0.2,0.3]} & {}^{1}_{0} & {}^{[0.3,0.7]}_{[0.1,0.2]}
\end{bmatrix}
$$

olarak elde edilir.

**Tanım 5.3.** $[a_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. Eğer $\lambda, \varepsilon \in Int([0,1])$ olmak üzere her $i$ ve $j$ için, $\alpha_{ij} = \lambda$ ve $\beta_{ij} = \varepsilon$ oluyorsa, $[a_{ij}]$'ye $(\lambda, \varepsilon)$-$d$-matris denir ve $\left[{}^{\lambda}_{\varepsilon}\right]$ ile gösterilir.

Özel olarak, $\left[{}^{0}_{1}\right]$ boş $d$-matris ve $\left[{}^{1}_{0}\right]$ evrensel $d$-matris olarak adlandırılır.

**Tanım 5.4.** $[a_{ij}], [b_{ij}] \in D_E[U]$, $I_E := \{j : x_j \in E\}$ ve $R \subseteq I_E$ olsun. O halde,

$$
\alpha^c_{ij} := \begin{cases} \alpha^a_{ij}, & j \in R \\ \alpha^b_{ij}, & j \in I_E \setminus R \end{cases} \quad \text{ve} \quad \beta^c_{ij} := \begin{cases} \beta^a_{ij}, & j \in R \\ \beta^b_{ij}, & j \in I_E \setminus R \end{cases}
$$

ile tanımlanan $[c_{ij}] \in D_E[U]$'ye $[a_{ij}]$'nin $Rb$-kısıtlanışı denir ve $[(a_{Rb})_{ij}]$ ile gösterilir.

Eğer $[b_{ij}] = \left[{}^{0}_{1}\right]$ ise $[(a_{R^0_1})_{ij}]$ notasyonu yerine $[(a_R)_{ij}]$ kullanılabilir. Dolayısıyla,

$$
(a_R)_{ij} = \begin{cases} {}^{\alpha_{ij}}_{\beta_{ij}}, & j \in R \\ {}^{0}_{1}, & j \in I_E \setminus R \end{cases}
$$

biçiminde olduğu açıktır.

**Örnek 5.5.** Örnek 5.2'de verilen $[a_{ij}]$ göz önüne alınsın. Ayrıca, $R = \{1,3,4\}$ ve $S =$

$\{1,3\}$ olsun. O halde, $[a_{ij}]$'nin $R_0^1$-kısıtlanışı ve $S$-kısıtlanışı

$$[(a_{R_0^1})_{ij}] = \begin{bmatrix} \begin{smallmatrix}[0.1,0.4]\\ [0.4,0.5]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0.2,0.5]\\ [0.1,0.2]\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}[0.4,0.6]\\ [0.2,0.3]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}[0.7,0.8]\\ [0,0.1]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0.3,0.4]\\ [0.5,0.6]\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}[0.1,0.4]\\ [0,0.2]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0,0.2]\\ [0.5,0.6]\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0.3,0.7]\\ [0.1,0.2]\end{smallmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad [(a_S)_{ij}] = \begin{bmatrix} \begin{smallmatrix}[0.1,0.4]\\ [0.4,0.5]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}[0.4,0.6]\\ [0.2,0.3]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}[0.7,0.8]\\ [0,0.1]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}[0.1,0.4]\\ [0,0.2]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

**Tanım 5.6.** $[a_{ij}],[b_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. Eğer her $i$ ve $j$ için, $\alpha_{ij}^a \tilde{\leq} \alpha_{ij}^b$ ve $\beta_{ij}^b \tilde{\leq} \beta_{ij}^a$ oluyorsa, $[a_{ij}]$'ye $[b_{ij}]$'nin bir alt matrisi denir ve $[a_{ij}] \tilde{\subseteq} [b_{ij}]$ ile gösterilir.

**Önerme 5.7.** $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

*i.* $[a_{ij}] \tilde{\subseteq} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

*ii.* $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tilde{\subseteq} [a_{ij}]$

*iii.* $[a_{ij}] \tilde{\subseteq} [a_{ij}]$

*iv.* $([a_{ij}] \tilde{\subseteq} [b_{ij}] \wedge [b_{ij}] \tilde{\subseteq} [c_{ij}]) \Rightarrow [a_{ij}] \tilde{\subseteq} [c_{ij}]$

biçimindedir.

**Tanım 5.8.** $[a_{ij}],[b_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. Eğer her $i$ ve $j$ için, $\alpha_{ij}^a = \alpha_{ij}^b$ ve $\beta_{ij}^a = \beta_{ij}^b$ oluyorsa, $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$'ye eşit $d$-matrisler denir ve $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ ile gösterilir.

**Önerme 5.9.** $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

*i.* $([a_{ij}] = [b_{ij}] \wedge [b_{ij}] = [c_{ij}]) \Rightarrow [a_{ij}] = [c_{ij}]$

*ii.* $([a_{ij}] \tilde{\subseteq} [b_{ij}] \wedge [b_{ij}] \tilde{\subseteq} [a_{ij}]) \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$

biçimindedir.

**Tanım 5.10.** $[a_{ij}],[b_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. Eğer $[a_{ij}] \tilde{\subseteq} [b_{ij}]$ ve $[a_{ij}] \neq [b_{ij}]$ oluyorsa, $[a_{ij}]$'ye $[b_{ij}]$'nin bir öz alt matrisi denir ve $[a_{ij}] \tilde{\subsetneq} [b_{ij}]$ ile gösterilir.

**Tanım 5.11.** $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. Eğer her $i$ ve $j$ için, $\alpha_{ij}^c = \sup\{\alpha_{ij}^a, \alpha_{ij}^b\}$ ve $\beta_{ij}^c = \inf\{\beta_{ij}^a, \beta_{ij}^b\}$ oluyorsa, $[c_{ij}]$'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$'nin birleşimi denir ve $[a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}]$ ile gösterilir.

**Önerme 5.12.** $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

*i.* $[a_{ij}] \tilde{\cup} [a_{ij}] = [a_{ij}]$

*ii.* $[a_{ij}] \tilde{\cup} \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = [a_{ij}]$

*iii.* $[a_{ij}] \tilde{\cup} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

*iv.* $[a_{ij}]\tilde{\cup}[b_{ij}] = [b_{ij}]\tilde{\cup}[a_{ij}]$

*v.* $([a_{ij}]\tilde{\cup}[b_{ij}])\tilde{\cup}[c_{ij}] = [a_{ij}]\tilde{\cup}([b_{ij}]\tilde{\cup}[c_{ij}])$

*vi.* $([a_{ij}]\tilde{\subseteq}[b_{ij}] \Rightarrow [a_{ij}]\tilde{\cup}[b_{ij}] = [b_{ij}])$

biçimindedir.

**Tanım 5.13.** $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. Eğer her $i$ ve $j$ için, $\alpha^c_{ij} = \inf\{\alpha^a_{ij}, \alpha^b_{ij}\}$ ve $\beta^c_{ij} = \sup\{\beta^a_{ij}, \beta^b_{ij}\}$ oluyorsa, $[c_{ij}]$'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$'nin kesişimi denir ve $[a_{ij}]\tilde{\cap}[b_{ij}]$ ile gösterilir.

**Önerme 5.14.** $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

*i.* $[a_{ij}]\tilde{\cap}[a_{ij}] = [a_{ij}]$

*ii.* $[a_{ij}]\tilde{\cap}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = [a_{ij}]$

*iii.* $[a_{ij}]\tilde{\cap}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

*iv.* $[a_{ij}]\tilde{\cap}[b_{ij}] = [b_{ij}]\tilde{\cap}[a_{ij}]$

*v.* $([a_{ij}]\tilde{\cap}[b_{ij}])\tilde{\cap}[c_{ij}] = [a_{ij}]\tilde{\cap}([b_{ij}]\tilde{\cap}[c_{ij}])$

*vi.* $([a_{ij}]\tilde{\subseteq}[b_{ij}] \Rightarrow [a_{ij}]\tilde{\cap}[b_{ij}] = [a_{ij}])$

biçimindedir.

**Önerme 5.15.** $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

*i.* $[a_{ij}]\tilde{\cup}([b_{ij}]\tilde{\cap}[c_{ij}]) = ([a_{ij}]\tilde{\cup}[b_{ij}])\tilde{\cap}([a_{ij}]\tilde{\cup}[c_{ij}])$

*ii.* $[a_{ij}]\tilde{\cap}([b_{ij}]\tilde{\cup}[c_{ij}]) = ([a_{ij}]\tilde{\cap}[b_{ij}])\tilde{\cup}([a_{ij}]\tilde{\cap}[c_{ij}])$

biçimindedir.

KANIT.

*i.* $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
[a_{ij}]\tilde{\cup}([b_{ij}]\tilde{\cap}[c_{ij}]) &= [a_{ij}]\tilde{\cup}\begin{bmatrix}\inf\{\alpha^b_{ij},\alpha^c_{ij}\}\\ \sup\{\beta^b_{ij},\beta^c_{ij}\}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\sup\{\alpha^a_{ij},\inf\{\alpha^b_{ij},\alpha^c_{ij}\}\}\\ \inf\{\beta^a_{ij},\sup\{\beta^b_{ij},\beta^c_{ij}\}\}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\inf\{\sup\{\alpha^a_{ij},\alpha^b_{ij}\},\sup\{\alpha^a_{ij},\alpha^c_{ij}\}\}\\ \sup\{\inf\{\beta^a_{ij},\beta^b_{ij}\},\inf\{\beta^a_{ij},\beta^c_{ij}\}\}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\sup\{\alpha^a_{ij},\alpha^b_{ij}\}\\ \inf\{\beta^a_{ij},\beta^b_{ij}\}\end{bmatrix}\tilde{\cap}\begin{bmatrix}\sup\{\alpha^a_{ij},\alpha^c_{ij}\}\\ \inf\{\beta^a_{ij},\beta^c_{ij}\}\end{bmatrix}\\
&= ([a_{ij}]\tilde{\cup}[b_{ij}])\tilde{\cap}([a_{ij}]\tilde{\cup}[c_{ij}])
\end{aligned}$$

elde edilir.

*ii.* *i.*'nin kanıtına benzer biçimde yapılabilir. □

**Örnek 5.16.** $E = \{x_1,x_2,x_3\}$ ve $U = \{u_1,u_2\}$ olmak üzere aşağıda verilen iki $d$-matris göz önüne alınsın.

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2,0.4]}{[0,0.6]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{0.3}{0.4} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.4]}{[0.1,0.2]} \\ \genfrac{}{}{0pt}{}{0}{1} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.3]}{[0.4,0.6]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{0.5}{[0,0.4]} \\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.5,0.7]}{[0,0.3]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{0.2}{0.7} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.5,0.6]}{[0.1,0.3]} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad [b_{ij}] = \begin{bmatrix} \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.1,0.3]}{[0.1,0.2]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2,0.4]}{[0.3,0.5]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2,0.8]}{[0,0.1]} \\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.5]}{[0.1,0.2]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.1,0.3]}{[0.1,0.2]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{0.6}{0.1} \\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.4,0.8]}{[0.1,0.2]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{0}{1} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.1]}{[0,0.4]} \end{bmatrix}$$

O halde,

$$[a_{ij}]\tilde{\cup}[b_{ij}] = \begin{bmatrix} \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2,0.4]}{[0,0.2]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.4]}{[0.3,0.4]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.8]}{[0,0.1]} \\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.3,0.5]}{[0.1,0.2]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.1,0.3]}{[0.1,0.2]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{0.6}{[0,0.1]} \\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.5,0.8]}{[0,0.2]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{0.2}{0.7} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.5,0.6]}{[0,0.3]} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad [a_{ij}]\tilde{\cap}[b_{ij}] = \begin{bmatrix} \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.1,0.3]}{[0.1,0.6]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2,0.3]}{[0.4,0.5]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.2,0.4]}{[0.1,0.2]} \\ \genfrac{}{}{0pt}{}{0}{1} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.3]}{[0.4,0.6]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{0.5}{[0.1,0.4]} \\ \genfrac{}{}{0pt}{}{[0.4,0.7]}{[0.1,0.3]} & \genfrac{}{}{0pt}{}{0}{1} & \genfrac{}{}{0pt}{}{[0,0.1]}{[0.1,0.4]} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

**Tanım 5.17.** $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. Eğer her $i$ ve $j$ için, $\alpha^c_{ij} = \inf\{\alpha^a_{ij}, \beta^b_{ij}\}$ ve $\beta^c_{ij} = \sup\{\beta^a_{ij}, \alpha^b_{ij}\}$ oluyorsa, $[c_{ij}]$'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$'nin farkı denir ve $[a_{ij}]\tilde{\setminus}[b_{ij}]$ ile gösterilir.

**Önerme 5.18.** $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

*i.* $[a_{ij}]\tilde{\setminus}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = [a_{ij}]$

*ii.* $[a_{ij}]\tilde{\setminus}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

*iii.* $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\tilde{\setminus}[a_{ij}] = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

biçimindedir.

**Not 5.19.** $d$-matrislerde fark işlemi değişme ve birleşme özelliklerini sağlamaz.

**Tanım 5.20.** $[a_{ij}],[b_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. Eğer her $i$ ve $j$ için, $\alpha^b_{ij} = \beta^a_{ij}$ ve $\beta^b_{ij} = \alpha^a_{ij}$ oluyorsa, $[b_{ij}]$'ye $[a_{ij}]$'nin tümleyeni denir ve $[a_{ij}]^{\tilde{c}}$ veya $[a^{\tilde{c}}_{ij}]$ ile gösterilir.

Diğer bir ifadeyle, $[a_{ij}]^{\tilde{c}} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\tilde{\setminus}[a_{ij}]$ biçimindedir.

**Önerme 5.21.** $[a_{ij}],[b_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

*i.* $([a_{ij}]^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = [a_{ij}]$

*ii.* $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^{\tilde{c}} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

*iii.* $[a_{ij}]\tilde{\setminus}[b_{ij}] = [a_{ij}]\tilde{\cap}[b_{ij}]^{\tilde{c}}$

*iv.* $[a_{ij}]\tilde{\subseteq}[b_{ij}] \Rightarrow [b_{ij}]^{\tilde{c}}\tilde{\subseteq}[a_{ij}]^{\tilde{c}}$

biçimindedir.

**Önerme 5.22.** $[a_{ij}],[b_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde, aşağıdaki De Morgan kuralları sağlanır.

*i.* $([a_{ij}]\tilde{\cup}[b_{ij}])^{\tilde{c}} = [a_{ij}]^{\tilde{c}}\tilde{\cap}[b_{ij}]^{\tilde{c}}$

*ii.* $([a_{ij}]\tilde{\cap}[b_{ij}])^{\tilde{c}} = [a_{ij}]^{\tilde{c}}\tilde{\cup}[b_{ij}]^{\tilde{c}}$

KANIT.

*i.* $[a_{ij}], [b_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

$$([a_{ij}]\tilde{\cup}[b_{ij}])^{\tilde{c}} = \begin{bmatrix} \sup\{\alpha^a_{ij},\alpha^b_{ij}\} \\ \inf\{\beta^a_{ij},\beta^b_{ij}\} \end{bmatrix}^{\tilde{c}} = \begin{bmatrix} \inf\{\beta^a_{ij},\beta^b_{ij}\} \\ \sup\{\alpha^a_{ij},\alpha^b_{ij}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^a_{ij} \\ \alpha^a_{ij} \end{bmatrix} \tilde{\cap} \begin{bmatrix} \beta^b_{ij} \\ \alpha^b_{ij} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]^{\tilde{c}} \tilde{\cap} \left[b_{ij}\right]^{\tilde{c}}$$

elde edilir.

*ii.* *i.*'nin kanıtına benzer biçimde yapılabilir. □

**Tanım 5.23.** $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. Eğer her $i$ ve $j$ için,

$$\alpha^c_{ij} = \sup\left\{\inf\{\alpha^a_{ij}, \beta^b_{ij}\}, \inf\{\alpha^b_{ij}, \beta^a_{ij}\}\right\}$$

ve

$$\beta^c_{ij} = \inf\left\{\sup\{\beta^a_{ij}, \alpha^b_{ij}\}, \sup\{\beta^b_{ij}, \alpha^a_{ij}\}\right\}$$

oluyorsa, $[c_{ij}]$'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$'nin simetrik farkı denir ve $[a_{ij}]\tilde{\triangle}[b_{ij}]$ ile gösterilir.

**Önerme 5.24.** $[a_{ij}], [b_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

*i.* $[a_{ij}]\tilde{\triangle} \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right] = [a_{ij}]$

*ii.* $[a_{ij}]\tilde{\triangle} \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right] = [a_{ij}]^{\tilde{c}}$

*iii.* $[a_{ij}]\tilde{\triangle}[b_{ij}] = [b_{ij}]\tilde{\triangle}[b_{ij}]$

biçimindedir.

**Not 5.25.** $d$-matrislerde simetrik fark işlemi birleşme özelliğini sağlamaz.

**Örnek 5.26.** Örnek 5.16'da verilen $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ göz önüne alınsın. O halde,

$$[a_{ij}]\tilde{\setminus}[b_{ij}] = \begin{bmatrix} \begin{smallmatrix}[0.1,0.2]\\ [0.1,0.6]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0.3\\ 0.4\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0,0.1]\\ [0.2,0.8]\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0,0.2]\\ [0.4,0.6]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0.1\\ 0.6\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}[0.1,0.2]\\ [0.4,0.8]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0.2\\ 0.7\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0,0.4]\\ [0.1,0.3]\end{smallmatrix} \end{bmatrix} \text{ ve } [a_{ij}]\tilde{\triangle}[b_{ij}] = \begin{bmatrix} \begin{smallmatrix}[0.1,0.3]\\ [0.1,0.4]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0.3,0.4]\\ [0.3,0.4]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0.1,0.2]\\ [0.2,0.4]\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}[0.3,0.5]\\ [0.1,0.2]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0.1,0.3]\\ [0.1,0.3]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0.1,0.4]\\ 0.5\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}[0.1,0.3]\\ [0.4,0.7]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0.2\\ 0.7\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0,0.4]\\ [0.1,0.3]\end{smallmatrix} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

**Tanım 5.27.** $[a_{ij}], [b_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. Eğer $[a_{ij}]\tilde{\cap}[b_{ij}] = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ oluyorsa, $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$'ye ayrık $d$-matrisler denir.

**Tanım 5.28.** $[a_{ij}], [b_{ij}] \in D_E[U]$, $I_E := \{j : x_j \in E\}$ ve $R \subseteq I_E$ olsun. O halde,

$$\alpha^c_{ij} := \begin{cases} \sup\left\{\alpha^a_{ij}, \inf_{k\in R}\{\alpha^b_{ik}\}\right\}, & j \in R \\ \alpha^a_{ij}, & j \in I_E \setminus R \end{cases} \quad \text{ve} \quad \beta^c_{ij} := \begin{cases} \inf\left\{\beta^a_{ij}, \sup_{k\in R}\{\beta^b_{ik}\}\right\}, & j \in R \\ \beta^a_{ij}, & j \in I_E \setminus R \end{cases}$$

ile tanımlanan $[c_{ij}] \in D_E[U]$'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$'nin $R$-bağıl birleşimi denir ve $[a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[b_{ij}]$ ile gösterilir.

Özel olarak, $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$'nin $I_E$-bağıl birleşimine bağıl birleşim denir ve $[a_{ij}]\tilde{\cup}^r[b_{ij}]$ ile gösterilir.

**Önerme 5.29.** $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

*i.* $[a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[a_{ij}] = [a_{ij}]$

*ii.* $[a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = [a_{ij}]$

*iii.* $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tilde{\cup}^r_R[a_{ij}] = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

*iv.* $([a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[b_{ij}])\tilde{\cup}^r_R[c_{ij}] = [a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R([b_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[c_{ij}])$

biçimindedir.

KANIT.

*i.* $[a_{ij}],[b_{ij}] \in D_E[U]$, $[a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[a_{ij}] = [b_{ij}]$, $I_E := \{j : x_j \in E\}$ ve $R \subseteq I_E$ olsun. Eğer $j \in R$, $\inf_{k\in R}\{\alpha^a_{ik}\} = \alpha^a_{ij}$ ve $\sup_{k\in R}\{\beta^a_{ik}\} = \beta^a_{ij}$ ise $\alpha^b_{ij} = \sup\left\{\alpha^a_{ij}, \inf_{k\in R}\{\alpha^a_{ik}\}\right\} = \alpha^a_{ij}$ ve $\beta^b_{ij} = \inf\left\{\beta^a_{ij}, \sup_{k\in R}\{\beta^a_{ik}\}\right\} = \beta^a_{ij}$ elde edilir. Eğer $j \in R$, $\inf_{k\in R}\{\alpha^a_{ik}\} \neq \alpha^a_{ij}$ ve $\sup_{k\in R}\{\beta^a_{ik}\} \neq \beta^a_{ij}$ ise $\inf_{k\in R}\{\alpha^a_{ik}\}\tilde{\leq}\alpha^a_{ij}$ ve $\beta^a_{ij}\tilde{\leq}\sup_{k\in R}\{\beta^a_{ik}\}$ olduğundan $\alpha^b_{ij} = \sup\left\{\alpha^a_{ij}, \inf_{k\in R}\{\alpha^a_{ik}\}\right\} = \alpha^a_{ij}$ ve $\beta^b_{ij} = \inf\left\{\beta^a_{ij}, \sup_{k\in R}\{\beta^a_{ik}\}\right\} = \beta^a_{ij}$ elde edilir. Eğer $j \notin R$ ise $\alpha^b_{ij} = \alpha^a_{ij}$ ve $\beta^b_{ij} = \beta^a_{ij}$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\alpha^b_{ij} = \begin{cases} \sup\left\{\alpha^a_{ij}, \inf_{k\in R}\{\alpha^a_{ik}\}\right\}, & j \in R \\ \alpha^a_{ij}, & j \in I_E \setminus R \end{cases} = \alpha^a_{ij}$$

ve

$$\beta^b_{ij} = \begin{cases} \inf\left\{\beta^a_{ij}, \sup_{k\in R}\{\beta^a_{ik}\}\right\}, & j \in R \\ \beta^a_{ij}, & j \in I_E \setminus R \end{cases} = \beta^a_{ij}$$

biçimindedir. O halde, $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ olduğundan $[a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[a_{ij}] = [a_{ij}]$ elde edilir.

*ii.* $[a_{ij}] \in D_E[U]$ ve $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}\tilde{\alpha}_{ij}\\ \tilde{\beta}_{ij}\end{bmatrix}$ olsun. O halde, her $i$ ve $j$ için, $\tilde{\alpha}_{ij} = 0$ ve $\tilde{\beta}_{ij} = 1$ olduğundan

$$[a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{cases} \sup\left\{\alpha_{ij}, \inf_{k\in R}\{\tilde{\alpha}_{ik}\}\right\}, & j \in R \\ \alpha_{ij}, & j \in I_E \setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \inf\left\{\beta_{ij}, \sup_{k\in R}\{\tilde{\beta}_{ik}\}\right\}, & j \in R \\ \beta_{ij}, & j \in I_E \setminus R \end{cases} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \begin{cases} \sup\left\{\alpha_{ij},0\right\}, & j\in R \\ \alpha_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \inf\left\{\beta_{ij},1\right\}, & j\in R \\ \beta_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{cases} \alpha_{ij}, & j\in R \\ \alpha_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \beta_{ij}, & j\in R \\ \beta_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_{ij} \\ \beta_{ij} \end{bmatrix} \\
&= [a_{ij}]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

*iii.* $[a_{ij}]\in D_E[U]$ olsun. O halde,

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\cup}^r_R [a_{ij}] &= \begin{bmatrix} \begin{cases} \sup\{1,\inf_{k\in R}\{\alpha_{ik}\}\}, & j\in R \\ 1, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \inf\{0,\sup_{k\in R}\{\beta_{ik}\}\}, & j\in R \\ 0, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{cases} 1, & j\in R \\ 1, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} 0, & j\in R \\ 0, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

*iv.* $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}]\in D_E[U]$ ve $R=\{l_1,l_2,\dots,l_s\dots\}$ olsun. O halde,

$$
([a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[b_{ij}])\tilde{\cup}^r_R[c_{ij}] = \begin{bmatrix} \begin{cases} \sup\left\{\alpha^a_{ij},\inf_{k\in R}\{\alpha^b_{ik}\}\right\}, & j\in R \\ \alpha^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \inf\left\{\beta^a_{ij},\sup_{k\in R}\{\beta^b_{ik}\}\right\}, & j\in R \\ \beta^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \end{bmatrix} \tilde{\cup}^r_R \begin{bmatrix} \alpha^c_{ij} \\ \beta^c_{ij} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \begin{cases} \sup\left\{\sup\left\{\alpha^a_{ij}, \inf_{k\in R}\{\alpha^b_{ik}\}\right\}, \inf_{t\in R}\{\alpha^c_{it}\}\right\}, & j\in R \\ \alpha^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \inf\left\{\inf\left\{\beta^a_{ij}, \sup_{k\in R}\{\beta^b_{ik}\}\right\}, \sup_{t\in R}\{\beta^c_{it}\}\right\}, & j\in R \\ \beta^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{cases} \sup\left\{\alpha^a_{ij}, \sup\left\{\inf_{k\in R}\{\alpha^b_{ik}\}, \inf_{t\in R}\{\alpha^c_{it}\}\right\}\right\}, & j\in R \\ \alpha^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \inf\left\{\beta^a_{ij}, \inf\left\{\sup_{k\in R}\{\beta^b_{ik}\}, \sup_{t\in R}\{\beta^c_{it}\}\right\}\right\}, & j\in R \\ \beta^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{cases} \sup\left\{\alpha^a_{ij}, \sup\left\{\inf\{\alpha^b_{il_1},\dots,\alpha^b_{il_s},\dots\}, \inf_{t\in R}\{\alpha^c_{it}\}\right\}\right\}, & j\in R \\ \alpha^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \inf\left\{\beta^a_{ij}, \inf\left\{\sup\{\beta^b_{il_1},\dots,\beta^b_{il_s},\dots\}, \sup_{t\in R}\{\beta^c_{it}\}\right\}\right\}, & j\in R \\ \beta^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{cases} \sup\left\{\alpha^a_{ij}, \inf\left\{\sup\{\alpha^b_{il_1}, \inf_{t\in R}\{\alpha^c_{it}\}\},\dots,\sup\{\alpha^b_{il_s}, \inf_{t\in R}\{\alpha^c_{it}\}\},\dots\right\}\right\}, & j\in R \\ \alpha^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \inf\left\{\beta^a_{ij}, \sup\left\{\inf\{\beta^b_{il_1}, \sup_{t\in R}\{\beta^c_{it}\}\},\dots,\inf\{\beta^b_{il_s}, \sup_{t\in R}\{\beta^c_{it}\}\},\dots\right\}\right\}, & j\in R \\ \beta^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{cases} \sup\left\{\alpha^a_{ij}, \inf_{k\in R}\left\{\sup\{\alpha^b_{ik}, \inf_{t\in R}\{\alpha^c_{it}\}\}\right\}\right\}, & j\in R \\ \alpha^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \inf\left\{\beta^a_{ij}, \sup_{k\in R}\left\{\inf\{\beta^b_{ik}, \sup_{t\in R}\{\beta^c_{it}\}\}\right\}\right\}, & j\in R \\ \beta^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha^a_{ij} \\ \beta^a_{ij} \end{bmatrix} \tilde{\cup}^r_R \begin{bmatrix} \begin{cases} \sup\left\{\alpha^b_{ij}, \inf_{k\in R}\{\alpha^c_{ik}\}\right\}, & j\in R \\ \alpha^b_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \inf\left\{\beta^b_{ij}, \sup_{k\in R}\{\beta^c_{ik}\}\right\}, & j\in R \\ \beta^b_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \end{bmatrix} \\
&= [a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R([b_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[c_{ij}])
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

**Tanım 5.30.** $[a_{ij}], [b_{ij}] \in D_E[U]$, $I_E := \{j : x_j \in E\}$ ve $R \subseteq I_E$ olsun. O halde,

$$
\alpha^c_{ij} := \begin{cases} \inf\left\{\alpha^a_{ij}, \sup_{k\in R}\{\alpha^b_{ik}\}\right\}, & j\in R \\ \alpha^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \quad \text{ve} \quad \beta^c_{ij} := \begin{cases} \sup\left\{\beta^a_{ij}, \inf_{k\in R}\{\beta^b_{ik}\}\right\}, & j\in R \\ \beta^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases}
$$

ile tanımlanan $[c_{ij}] \in D_E[U]$'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$'nin $R$-bağıl kesişimi denir ve $[a_{ij}]\tilde{\cap}^r_R[b_{ij}]$ ile gösterilir.

Özel olarak, $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$'nin $I_E$-bağıl kesişimine bağıl kesişim denir ve $[a_{ij}]\tilde{\cap}^r[b_{ij}]$ ile gösterilir.

**Önerme 5.31.** $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

*i.* $[a_{ij}]\tilde{\cap}^r_R[a_{ij}] = [a_{ij}]$

*ii.* $[a_{ij}]\tilde{\cap}^r_R \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = [a_{ij}]$

*iii.* $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tilde{\cap}^r_R[a_{ij}] = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

*iv.* $([a_{ij}]\tilde{\cap}^r_R[b_{ij}])\tilde{\cap}^r_R[c_{ij}] = [a_{ij}]\tilde{\cap}^r_R([b_{ij}]\tilde{\cap}^r_R[c_{ij}])$

biçimindedir.

KANIT. Önerme 5.29'un kanıtına benzer biçimde yapılabilir. □

**Önerme 5.32.** $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

*i.* $([a_{ij}]\tilde{\cap}^r_R[b_{ij}])\tilde{\cup}^r_R[c_{ij}] = ([a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[c_{ij}])\tilde{\cap}^r_R([b_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[c_{ij}])$

*ii.* $([a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[b_{ij}])\tilde{\cap}^r_R[c_{ij}] = ([a_{ij}]\tilde{\cap}^r_R[c_{ij}])\tilde{\cup}^r_R([b_{ij}]\tilde{\cap}^r_R[c_{ij}])$

biçimindedir.

KANIT.

*i.* $[a_{ij}],[b_{ij}],[c_{ij}],[d_{ij}] \in D_E[U]$ ve $([a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[c_{ij}])\tilde{\cap}^r_R([b_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[c_{ij}]) = [d_{ij}]$ olsun. O halde,

$$
\begin{aligned}
[d_{ij}] &= \begin{bmatrix} \begin{cases} \inf\{\sup\{\alpha^a_{ij}, \inf_{t\in R}\{\alpha^c_{it}\}\}, \sup_{k\in R}\{\sup\{\alpha^b_{ik}, \inf_{t\in R}\{\alpha^c_{it}\}\}\}\}, & j\in R \\ \alpha^a_{ij}, & j \in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \sup\{\inf\{\beta^a_{ij}, \sup_{t\in R}\{\beta^c_{it}\}\}, \inf_{k\in R}\{\inf\{\beta^b_{ik}, \sup_{t\in R}\{\beta^c_{it}\}\}\}\}, & j\in R \\ \beta^a_{ij}, & j \in I_E\setminus R \end{cases} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{cases} \inf\{\sup\{\alpha^a_{ij}, \inf_{t\in R}\{\alpha^c_{it}\}\}, \sup\{\sup_{k\in R}\{\alpha^b_{ik}\}, \inf_{t\in R}\{\alpha^c_{it}\}\}\}, & j\in R \\ \alpha^a_{ij}, & j \in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \sup\{\inf\{\beta^a_{ij}, \sup_{t\in R}\{\beta^c_{it}\}\}, \inf\{\inf_{k\in R}\{\beta^b_{ik}\}, \sup_{t\in R}\{\beta^c_{it}\}\}\}, & j\in R \\ \beta^a_{ij}, & j \in I_E\setminus R \end{cases} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{cases} \sup\{\inf\{\alpha^a_{ij}, \sup_{k\in R}\{\alpha^b_{ik}\}\}, \inf_{t\in R}\{\alpha^c_{it}\}\}, & j\in R \\ \alpha^a_{ij}, & j \in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \inf\{\sup\{\beta^a_{ij}, \inf_{k\in R}\{\beta^b_{ik}\}\}, \sup_{t\in R}\{\beta^c_{it}\}\}, & j\in R \\ \beta^a_{ij}, & j \in I_E\setminus R \end{cases} \end{bmatrix} \\
&= ([a_{ij}]\tilde{\cap}^r_R[b_{ij}])\tilde{\cup}^r_R[c_{ij}]
\end{aligned}
$$

olduğundan $([a_{ij}]\tilde{\cap}^r_R[b_{ij}])\tilde{\cup}^r_R[c_{ij}] = ([a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[c_{ij}])\tilde{\cap}^r_R([b_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[c_{ij}])$ elde edilir.

*ii.* *i.*'nin kanıtına benzer biçimde yapılabilir. □

**Örnek 5.33.** Örnek 5.16'da verilen $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ göz önüne alınsın ve $R = \{2,3\}$ olsun. O halde,

$$[a_{ij}]\tilde{\cup}^r[b_{ij}] = \begin{bmatrix} \begin{smallmatrix}[0.2,0.4]\\ [0,0.5]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0.3\\ [0.3,0.4]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0.3,0.4]\\ [0.1,0.2]\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}[0.1,0.3]\\ [0.1,0.2]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0.1,0.3]\\ [0.1,0.2]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0.5\\ [0,0.2]\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}[0.5,0.7]\\ [0,0.3]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0.2\\ 0.7\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0.5,0.6]\\ [0.1,0.3]\end{smallmatrix} \end{bmatrix} \text{ ve } [a_{ij}]\tilde{\cap}^r_R[b_{ij}] = \begin{bmatrix} \begin{smallmatrix}[0.2,0.4]\\ [0,0.6]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0.2,0.3]\\ 0.4\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0.2,0.4]\\ [0.1,0.2]\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0,0.3]\\ [0.4,0.6]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0.5\\ [0.1,0.4]\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}[0.5,0.7]\\ [0,0.3]\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0,0.1]\\ 0.7\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}[0,0.1]\\ [0.1,0.4]\end{smallmatrix} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

**Not 5.34.** $d$-matrislerde $R$-bağıl birleşim ve $R$-bağıl kesişim işlemleri değişme özelliğini sağlamaz. Ayrıca, $R$-bağıl birleşim işlemi $R$-bağıl kesişim işlemi üzerine ve $R$-bağıl kesişim işlemi $R$-bağıl birleşim işlemi üzerine soldan dağılma özelliğini sağlamaz. Dolaysıyla, $R$-bağıl birleşim işlemi ve $R$-bağıl kesişim işlemi birbirleri üzerine dağılma özelliğini sağlamaz.

**Tanım 5.35.** $[a_{ij}],[b_{ij}] \in D_E[U]$, $I_E := \{j : x_j \in E\}$ ve $R \subseteq I_E$ olsun. O halde,

$$\alpha^c_{ij} := \begin{cases} \inf\left\{\alpha^a_{ij}, \sup_{k\in R}\{\beta^b_{ik}\}\right\}, & j \in R \\ \alpha^a_{ij}, & j \in I_E \setminus R \end{cases} \quad \text{ve} \quad \beta^c_{ij} := \begin{cases} \sup\left\{\beta^a_{ij}, \inf_{k\in R}\{\alpha^b_{ik}\}\right\}, & j \in R \\ \beta^a_{ij}, & j \in I_E \setminus R \end{cases}$$

ile tanımlanan $[c_{ij}] \in D_E[U]$'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$'nin $R$-bağıl farkı denir ve $[a_{ij}]\tilde{\setminus}^r_R[b_{ij}]$ ile gösterilir.

Özel olarak, $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$'nin $I_E$-bağıl farkına bağıl fark denir ve $[a_{ij}]\tilde{\setminus}^r[b_{ij}]$ ile gösterilir.

**Önerme 5.36.** $[a_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

*i.* $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\tilde{\setminus}^r_R[a_{ij}] = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

*ii.* $[a_{ij}]\tilde{\setminus}^r_R\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = [a_{ij}]$

*iii.* $[a_{ij}]\tilde{\setminus}^r_R\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

biçimindedir.

**Önerme 5.37.** $[a_{ij}],[b_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde, aşağıdaki De Morgan kuralları sağlanır.

*i.* $([a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[b_{ij}])^{\tilde{c}} = [a_{ij}]^{\tilde{c}}\tilde{\cap}^r_R[b_{ij}]^{\tilde{c}}$

*ii.* $([a_{ij}]\tilde{\cap}^r_R[b_{ij}])^{\tilde{c}} = [a_{ij}]^{\tilde{c}}\tilde{\cup}^r_R[b_{ij}]^{\tilde{c}}$

KANIT.

*i.* $[a_{ij}],[b_{ij}] \in D_E[U]$ olsun. O halde,

$$
\begin{aligned}
([a_{ij}]\tilde{\cup}^r_R[b_{ij}])^{\tilde{c}} &= \left[\begin{matrix} \begin{cases} \sup\left\{\alpha^a_{ij}, \inf_{k\in R}\{\alpha^b_{ik}\}\right\}, & j\in R \\ \alpha^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \inf\left\{\beta^a_{ij}, \sup_{k\in R}\{\beta^b_{ik}\}\right\}, & j\in R \\ \beta^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \end{matrix}\right]^{\tilde{c}} \\
&= \left[\begin{matrix} \begin{cases} \inf\left\{\beta^a_{ij}, \sup_{k\in R}\{\beta^b_{ik}\}\right\}, & j\in R \\ \beta^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \\ \begin{cases} \sup\left\{\alpha^a_{ij}, \inf_{k\in R}\{\alpha^b_{ik}\}\right\}, & j\in R \\ \alpha^a_{ij}, & j\in I_E\setminus R \end{cases} \end{matrix}\right] \\
&= [a_{ij}]^{\tilde{c}}\tilde{\cap}^r_R[b_{ij}]^{\tilde{c}}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

*ii.* *i.*'nin kanıtına benzer biçimde yapılabilir. □

**Tanım 5.38.** $[a_{ij}]_{m\times n_1} \in D_{E_1}[U]$ ve $[b_{ik}]_{m\times n_2} \in D_{E_2}[U]$ olsun. O halde, $p = n_2(j-1)+k$ olmak üzere,

$$\alpha^c_{ip} := \inf\{\alpha^a_{ij}, \alpha^b_{ik}\} \quad \text{ve} \quad \beta^c_{ip} := \sup\{\beta^a_{ij}, \beta^b_{ik}\}$$

ile tanımlı $[c_{ip}]_{m\times n_1 n_2} \in D_{E_1\times E_2}[U]$ matrisine $[a_{ij}]$ ile $[b_{ik}]$'nın ve-çarpımı denir ve $[a_{ij}]\wedge[b_{ik}]$ ile gösterilir.

**Tanım 5.39.** $[a_{ij}]_{m\times n_1} \in D_{E_1}[U]$ ve $[b_{ik}]_{m\times n_2} \in D_{E_2}[U]$ olsun. O halde, $p = n_2(j-1)+k$ olmak üzere,

$$\alpha^c_{ip} := \sup\{\alpha^a_{ij}, \alpha^b_{ik}\} \quad \text{ve} \quad \beta^c_{ip} := \inf\{\beta^a_{ij}, \beta^b_{ik}\}$$

ile tanımlı $[c_{ip}]_{m\times n_1 n_2} \in D_{E_1\times E_2}[U]$ matrisine $[a_{ij}]$ ile $[b_{ik}]$'nın veya-çarpımı denir ve $[a_{ij}]\vee[b_{ik}]$ ile gösterilir.

**Tanım 5.40.** $[a_{ij}]_{m\times n_1} \in D_{E_1}[U]$ ve $[b_{ik}]_{m\times n_2} \in D_{E_2}[U]$ olsun. O halde, $p = n_2(j-1)+k$ olmak üzere,

$$\alpha^c_{ip} := \inf\{\alpha^a_{ij}, \beta^b_{ik}\} \quad \text{ve} \quad \beta^c_{ip} := \sup\{\beta^a_{ij}, \alpha^b_{ik}\}$$

ile tanımlı $[c_{ip}]_{m\times n_1 n_2} \in D_{E_1\times E_2}[U]$ matrisine $[a_{ij}]$ ile $[b_{ik}]$'nın vedeğil-çarpımı denir ve $[a_{ij}]\overline{\wedge}[b_{ik}]$ ile gösterilir.

**Tanım 5.41.** $[a_{ij}]_{m\times n_1} \in D_{E_1}[U]$ ve $[b_{ik}]_{m\times n_2} \in D_{E_2}[U]$ olsun. O halde, $p = n_2(j-1)+k$

$k$ olmak üzere,

$$\alpha_{ip}^{c} := \sup\{\alpha_{ij}^{a}, \beta_{ik}^{b}\} \quad \text{ve} \quad \beta_{ip}^{c} := \inf\{\beta_{ij}^{a}, \alpha_{ik}^{b}\}$$

ile tanımlı $[c_{ip}]_{m\times n_1 n_2} \in D_{E_1\times E_2}[U]$ matrisine $[a_{ij}]$ ile $[b_{ik}]$'nın veyadeğil-çarpımı denir ve $[a_{ij}]\underline{\vee}[b_{ik}]$ ile gösterilir.

**Örnek 5.42.** Örnek 5.16'da verilen $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ göz önüne alınsın. O halde,

$$[a_{ij}]\overline{\wedge}[b_{ik}] = \begin{bmatrix} \substack{[0.1,0.2] \\ [0.1,0.6]} & \substack{[0.2,0.4] \\ [0.2,0.6]} & \substack{[0,0.1] \\ [0.2,0.8]} & \substack{[0.1,0.2] \\ 0.4} & \substack{0.3 \\ 0.4} & \substack{[0,0.1] \\ [0.4,0.8]} & \substack{[0.1,0.2] \\ [0.1,0.3]} & \substack{[0.3,0.4] \\ [0.2,0.4]} & \substack{[0,0.1] \\ [0.2,0.8]} \\ \substack{0 \\ 1} & \substack{0 \\ 1} & \substack{0 \\ 1} & \substack{[0,0.2] \\ [0.4,0.6]} & \substack{[0,0.2] \\ [0.4,0.6]} & \substack{[0,0.1] \\ 0.6} & \substack{[0.1,0.2] \\ [0.3,0.5]} & \substack{[0.1,0.2] \\ [0.1,0.4]} & \substack{0.1 \\ 0.6} \\ \substack{[0.1,0.2] \\ [0.4,0.8]} & \substack{[0.5,0.7] \\ [0,0.3]} & \substack{[0,0.4] \\ [0,0.3]} & \substack{[0.1,0.2] \\ [0.7,0.8]} & \substack{0.2 \\ 0.7} & \substack{[0,0.2] \\ 0.7} & \substack{[0.1,0.2] \\ [0.4,0.8]} & \substack{[0.5,0.6] \\ [0.1,0.3]} & \substack{[0,0.4] \\ [0.1,0.3]} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

**Önerme 5.43.** $[a_{ij}]_{m\times n_1} \in D_{E_1}[U]$, $[b_{ik}]_{m\times n_2} \in D_{E_2}[U]$ ve $[c_{il}]_{m\times n_3} \in D_{E_3}[U]$ olsun. O halde,

*i.* $([a_{ij}] \wedge [b_{ik}]) \wedge [c_{il}] = [a_{ij}] \wedge ([b_{ik}] \wedge [c_{il}])$

*ii.* $([a_{ij}] \vee [b_{ik}]) \vee [c_{il}] = [a_{ij}] \vee ([b_{ik}] \vee [c_{il}])$

biçimindedir.

KANIT.

*i.* $[a_{ij}]_{m\times n_1} \in D_{E_1}[U]$, $[b_{ik}]_{m\times n_2} \in D_{E_2}[U]$, $[c_{il}]_{m\times n_3} \in D_{E_3}[U]$, $[a_{ij}] \wedge [b_{ik}] = [d_{ip}]$, $[b_{ik}] \wedge [c_{il}] = [e_{ir}]$, $([a_{ij}] \wedge [b_{ik}]) \wedge [c_{il}] = [f_{is}]$ ve $[a_{ij}] \wedge ([b_{ik}] \wedge [c_{il}]) = [h_{it}]$ olsun. O halde, $[d_{ip}]_{m\times n_1 n_2} \in D_{E_1\times E_2}[U]$, $[e_{ir}]_{m\times n_2 n_3} \in D_{E_2\times E_3}[U]$ ve $[f_{is}]_{m\times n_1 n_2 n_3}, [h_{it}]_{m\times n_1 n_2 n_3} \in D_{E_1\times E_2\times E_3}[U]$ biçimindedir. Dolayısıyla, Tanım 5.38 gereğince $p = n_2(j-1)+k$ ve $s = n_3(p-1)+l$ olduğundan

$$s = n_3 n_2 (j-1) + n_3(k-1) + l \tag{5.1}$$

elde edilir. Benzer şekilde, Tanım 5.38 gereğince $r = n_3(k-1)+l$ ve $t = n_2 n_3 (j-1) + r$ olduğundan

$$t = n_2 n_3 (j-1) + n_3(k-1) + l \tag{5.2}$$

elde edilir. Dolayısıyla 5.1 ve 5.2'den $s = t$ biçimindedir. Ayrıca, her $i$, $s$ ve $t$ için,

$$\alpha_{is}^{f} = \inf\{\inf\{\alpha_{ij}^{a}, \alpha_{ik}^{b}\}, \alpha_{il}^{c}\} \quad \text{ve} \quad \beta_{is}^{f} = \sup\{\sup\{\beta_{ij}^{a}, \beta_{ik}^{b}\}, \beta_{il}^{c}\}$$

ve

$$\alpha_{it}^{h} = \inf\{\alpha_{ij}^{a}, \inf\{\alpha_{ik}^{b}, \alpha_{il}^{c}\}\} \quad \text{ve} \quad \beta_{it}^{h} = \sup\{\beta_{ij}^{a}, \sup\{\beta_{ik}^{b}, \beta_{il}^{c}\}\}$$

olduğundan $\alpha_{is}^{f} = \alpha_{it}^{h}$ ve $\beta_{is}^{f} = \beta_{it}^{h}$ elde edilir. Sonuç olarak, $([a_{ij}] \wedge [b_{ik}]) \wedge [c_{il}] = [a_{ij}] \wedge ([b_{ik}] \wedge [c_{il}])$ biçimindedir.

*ii.* *i.*'nin kanıtına benzer biçimde yapılabilir. □

**Önerme 5.44.** $[a_{ij}]_{m\times n_1} \in D_{E_1}[U]$ ve $[b_{ik}]_{m\times n_2} \in D_{E_2}[U]$ olsun. O halde, aşağıdaki De Morgan kuralları sağlanır.

*i.* $([a_{ij}] \vee [b_{ik}])^{\tilde{c}} = [a_{ij}]^{\tilde{c}} \wedge [b_{ik}]^{\tilde{c}}$

*ii.* $([a_{ij}] \wedge [b_{ik}])^{\tilde{c}} = [a_{ij}]^{\tilde{c}} \vee [b_{ik}]^{\tilde{c}}$

*iii.* $([a_{ij}] \veebar [b_{ik}])^{\tilde{c}} = [a_{ij}]^{\tilde{c}} \overline{\wedge} [b_{ik}]^{\tilde{c}}$

*iv.* $([a_{ij}] \overline{\wedge} [b_{ik}])^{\tilde{c}} = [a_{ij}]^{\tilde{c}} \veebar [b_{ik}]^{\tilde{c}}$

KANIT.

*iv.* $[a_{ij}]_{m\times n_1} \in D_{E_1}[U]$ ve $[b_{ik}]_{m\times n_2} \in D_{E_2}[U]$ olsun. O halde,

$$([a_{ij}]\overline{\wedge}[b_{ik}])^{\tilde{c}} = \begin{bmatrix} \inf\{\alpha_{ij}^{a}, \beta_{ik}^{b}\} \\ \sup\{\beta_{ij}^{a}, \alpha_{ik}^{b}\} \end{bmatrix}^{\tilde{c}} = \begin{bmatrix} \sup\{\beta_{ij}^{a}, \alpha_{ik}^{b}\} \\ \inf\{\alpha_{ij}^{a}, \beta_{ik}^{b}\} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]^{\tilde{c}} \veebar \left[b_{ij}\right]^{\tilde{c}}$$

elde edilir.

Diğerlerinin kanıtı *iv.*'ün kanıtına benzer biçiminde yapılabilir. □

**Not 5.45.** *d*-matrislerin yukarıda bahsedilen çarpımları değişme özelliğini ve birbirleri üzerine dağılma özelliğini sağlamaz. Ayrıca, vedeğil-çarpım ve veyadeğil-çarpım işlemleri birleşme özelliğini sağlamaz.

## BÖLÜM 6
## $d$-MATRİSLER YOLUYLA PERFORMANS TEMELLİ DEĞER ATAMA

Bu bölümde, ilk olarak, $d$-kümelerin modelleme becerisini geliştirmek ve yüksek sayıda veri içeren problemlerdeki verileri bilgisayar ortamında işleyebilmek için, Bölüm 4'te önerilen esnek karar verme metodu $d$-matrisler aracılığıyla aslına sadık kalınarak yapılandırıldı. Bu bölüm boyunca, $I_n = \{1,2,3,\dots,n\}$ ve $I_n^* = \{0,1,2,\dots,n\}$ biçimindedir.

*Yapılandırılan Metodun Algoritma Adımları*

**Ön İşlem Adımı**

$i \in I_{m-1}^*$, $j \in I_n$ ve $t \in I_s$ olmak üzere $\mu_t^{ij}$ ve $\nu_t^{ij}$ değerleri girilir.

**Ana İşlem Adımları**

**Adım 1.** $a_{ij} := {}^{\alpha_{ij}^a}_{\beta_{ij}^a}$ ile tanımlanan bir $[a_{ij}]_{m\times n}$ $d$-matrisi inşa edilir. Burada, $I = \{p : \mu_p^{ij} = \max\limits_t \mu_t^{ij}\}$, $J = \{r : \nu_r^{ij} = \max\limits_t \nu_t^{ij}\}$, $i \in I_{m-1}^*$, $j \in I_n$ ve $t \in I_s$ olmak üzere $[a_{ij}]$'nin üye olma ve üye olmama dereceleri

$$\alpha_{ij}^a := \left[\frac{\min\limits_t \mu_t^{ij}}{\max\limits_t \mu_t^{ij} + \max\limits_t \nu_t^{ij} + \min\left\{\min\limits_{p\in I} \pi_p^{ij}, \min\limits_{r\in J} \pi_r^{ij}\right\}}, \frac{\max\limits_t \mu_t^{ij}}{\max\limits_t \mu_t^{ij} + \max\limits_t \nu_t^{ij} + \min\left\{\min\limits_{p\in I} \pi_p^{ij}, \min\limits_{r\in J} \pi_r^{ij}\right\}}\right]$$

ve

$$\beta_{ij}^a := \left[\frac{\min\limits_t \nu_t^{ij}}{\max\limits_t \mu_t^{ij} + \max\limits_t \nu_t^{ij} + \min\left\{\min\limits_{p\in I} \pi_p^{ij}, \min\limits_{r\in J} \pi_r^{ij}\right\}}, \frac{\max\limits_t \nu_t^{ij}}{\max\limits_t \mu_t^{ij} + \max\limits_t \nu_t^{ij} + \min\left\{\min\limits_{p\in I} \pi_p^{ij}, \min\limits_{r\in J} \pi_r^{ij}\right\}}\right]$$

ile tanımlanan fonksiyonlar aracılığıyla hesaplanır.

**Adım 2.** Bileşenleri *ivif*-değerler olan ve $i \in I_{m-1}$ olmak üzere, $\alpha_{i1} := \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^n \alpha_{0j}^a \alpha_{ij}^a$ ve $\beta_{i1} := \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^n \beta_{0j}^a \beta_{ij}^a$ ile tanmlanan $\begin{bmatrix}\alpha_{i1}\\ \beta_{i1}\end{bmatrix}_{(m-1)\times 1}$ sütun matrisi elde edilir. Burada, $\lambda := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{(\alpha_{0j}^a)^- + (\alpha_{0j}^a)^+}{2} - \frac{(\beta_{0j}^a)^- + (\beta_{0j}^a)^+}{2}\right)$ biçimindedir.

**Adım 3.** $i \in I_{m-1}$ olmak üzere, $s_{i1} := \alpha_{i1} - \beta_{i1}$ ile tanımlanan $[s_{i1}]_{(m-1)\times 1}$ skor matrisi elde edilir.

**Adım 4.** $d(u_k) = \left[\frac{s_{k1}^- + |\min\limits_i s_{i1}^-|}{\max\limits_i s_{i1}^+ + |\min\limits_i s_{i1}^-|}, \frac{s_{k1}^+ + |\min\limits_i s_{i1}^-|}{\max\limits_i s_{i1}^+ + |\min\limits_i s_{i1}^-|}\right]$ olacak biçimde bir $\{{}^{d(u_k)}u_k | u_k \in U\}$ karar kümesi elde edilir.

**Adım 5.**"$\leq_{XY}$" tam sıralama bağıntısı yoluyla alternatifler arasından optimum elemanlar seçilir.

Burada, $\alpha_{0j}^a = [(\alpha_{0j}^a)^-, (\alpha_{0j}^a)^+]$, $\beta_{0j}^a = [(\beta_{0j}^a)^-, (\beta_{0j}^a)^+]$ ve $s_{i1} = [s_{i1}^-, s_{i1}^+]$ biçimindedir.

İkinci olarak, $d$-matrisler aracılığıyla yapılandırılan metot gürültü kaldırmada kullanılan ve

- Piksel yoğunluğuna bağlı filtre (BPDF) (Erkan ve Gökrem, 2018)
- Modifiye karar tabanlı asimetrik kırpılmış medyan filtre (MDBUTMF) (Esakkirajan ve diğerleri, 2011)
- Karar tabanlı algoritma (DBA) (Pattnaik ve diğerleri, 2012)
- Gürültü uyarlamalı bulanık değiştirmeli medyan filtre (NAFSMF) (Toh ve Isa, 2010)
- Farklı uygulamalı medyan filtre (DAMF) (Erkan ve diğerleri, 2018)
- Uyarlanabilir ağırlıklı ortalama filtre (AWMF) (Tang ve diğerleri, 2016)
- Uyarlanabilir Riesz ortalama filtre (ARmF) (Enginoğlu, Erkan ve Memiş, 2019)

olarak adlandırılan yedi filtre için performans temelli değer atamaya ilişkin bir gerçek probleme uygulandı. Bu problemde, $u_1 =$ "BPDF", $u_2 =$ "MDBUTMF", $u_3 =$ "DBA", $u_4 =$ "NAFSMF", $u_5 =$ "DAMF", $u_6 =$ "AWMF" ve $u_7 =$ "ARmF" olmak üzere $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ alternatiflerin kümesini temsil etmektedir. Ayrıca, $x_1 =$ "%10 *gürültü yoğunluğu*", $x_2 =$ "%20 *gürültü yoğunluğu*", $x_3 =$ "%30 *gürültü yoğunluğu*", $x_4 =$ "%40 *gürültü yoğunluğu*", $x_5 =$ "%50 *gürültü yoğunluğu*", $x_6 =$ "%60 *gürültü yoğunluğu*", $x_7 =$ "%70 *gürültü yoğunluğu*", $x_8 =$ "%80 *gürültü yoğunluğu*" ve $x_9 =$ "%90 *gürültü yoğunluğu*" olmak üzere $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ karar verici tarafından belirlenen parametre kümesini göstermektedir.

Üçüncü olarak, "Lena", "Kameraman", "Barbara", "Babun", "Biber", "Oturma odası", "Göl", "Uçak", "Tepe", "Korsan", "Tekne", "Ev", "Köprü", "Elaine", "Çakmaktaşlar", "Çiçek", "Papağan", "Koyu saçlı kadın", "Sarışın kadın" ve "Einstein" olarak isimlendirilen yirmi geleneksel görüntü göz önüne alındı. Bu amaçla, %10'dan %90'a değişen gürültü yoğunluklarında bu görüntüler için filtrelerin SSIM (Wang ve diğerleri, 2004) sonuçları Tablo 7, 8, 9, 10 ve 11'de verildi. Ayrıca, bu tablolardaki koyu renkli değerler, en iyi skor değerlerini göstermektedir.

Tablo 7
Lena görüntüsü için filtrelerin SSIM sonuçları

| | **Filtreler** | **%10** | **%20** | **%30** | **%40** | **%50** | **%60** | **%70** | **%80** | **%90** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Lena** | **BPDF** | 0.9848 | 0.9657 | 0.9411 | 0.9087 | 0.8689 | 0.8120 | 0.7247 | 0.5683 | 0.3063 |
| | **MDBUTMF** | 0.9865 | 0.9479 | 0.8498 | 0.8155 | 0.8655 | 0.8898 | 0.8668 | 0.7830 | 0.4010 |
| | **DBA** | 0.9885 | 0.9741 | 0.9555 | 0.9291 | 0.8989 | 0.8560 | 0.7942 | 0.7139 | 0.5979 |
| | **NAFSMF** | 0.9839 | 0.9669 | 0.9485 | 0.9279 | 0.9080 | 0.8821 | 0.8511 | 0.8040 | 0.6862 |
| | **DAMF** | 0.9902 | 0.9789 | 0.9653 | 0.9488 | 0.9310 | 0.9085 | 0.8796 | 0.8396 | 0.7657 |
| | **AWMF** | 0.9822 | 0.9740 | 0.9636 | 0.9497 | 0.9349 | 0.9134 | 0.8852 | 0.8447 | 0.7737 |
| | **ARmF** | **0.9910** | **0.9810** | **0.9697** | **0.9554** | **0.9398** | **0.9176** | **0.8885** | **0.8471** | **0.7752** |

Tablo 8
Kameraman, Barbara, babun, biber, oturma odası ve göl görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları

| | Filtreler | %10 | %20 | %30 | %40 | %50 | %60 | %70 | %80 | %90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Kameraman** | **BPDF** | 0.9911 | 0.9782 | 0.9608 | 0.9344 | 0.8966 | 0.8453 | 0.7726 | 0.6722 | 0.5105 |
| | **MDBUTMF** | 0.9911 | 0.9412 | 0.8160 | 0.7818 | 0.8653 | 0.9174 | 0.9052 | 0.8265 | 0.4667 |
| | **DBA** | 0.9948 | 0.9867 | 0.9758 | 0.9586 | 0.9332 | 0.8977 | 0.8452 | 0.7805 | 0.6917 |
| | **NAFSMF** | 0.9798 | 0.9643 | 0.9500 | 0.9340 | 0.9177 | 0.8988 | 0.8727 | 0.8325 | 0.7207 |
| | **DAMF** | 0.9961 | 0.9908 | 0.9844 | 0.9759 | 0.9652 | 0.9512 | 0.9321 | 0.9012 | 0.8347 |
| | **AWMF** | 0.9883 | 0.9849 | 0.9813 | 0.9759 | 0.9681 | 0.9563 | 0.9371 | 0.9059 | 0.8401 |
| | **ARmF** | **0.9970** | **0.9933** | **0.9890** | **0.9828** | **0.9743** | **0.9614** | **0.9416** | **0.9093** | **0.8426** |
| **Barbara** | **BPDF** | 0.9743 | 0.9427 | 0.9046 | 0.8606 | 0.8024 | 0.7289 | 0.6258 | 0.4597 | 0.2316 |
| | **MDBUTMF** | 0.9741 | 0.9228 | 0.8235 | 0.7757 | 0.7962 | 0.7914 | 0.7477 | 0.6573 | 0.3884 |
| | **DBA** | 0.9769 | 0.9502 | 0.9174 | 0.8762 | 0.8279 | 0.7662 | 0.6880 | 0.5882 | 0.4589 |
| | **NAFSMF** | 0.9749 | 0.9472 | 0.9174 | 0.8843 | 0.8483 | 0.8039 | 0.7533 | 0.6896 | 0.5729 |
| | **DAMF** | 0.9815 | 0.9588 | 0.9327 | 0.9013 | 0.8675 | 0.8261 | 0.7786 | 0.7176 | 0.6308 |
| | **AWMF** | 0.9718 | 0.9540 | 0.9331 | 0.9065 | 0.8762 | 0.8366 | 0.7879 | 0.7250 | 0.6382 |
| | **ARmF** | **0.9841** | **0.9654** | **0.9438** | **0.9172** | **0.8861** | **0.8450** | **0.7949** | **0.7291** | **0.6394** |
| **Babun** | **BPDF** | 0.9795 | 0.9516 | 0.9112 | 0.8556 | 0.7812 | 0.6841 | 0.5622 | 0.4080 | 0.1377 |
| | **MDBUTMF** | 0.9727 | 0.9321 | 0.8655 | 0.8228 | 0.8126 | 0.7869 | 0.7317 | 0.6333 | 0.3625 |
| | **DBA** | 0.9844 | 0.9644 | 0.9352 | 0.8933 | 0.8373 | 0.7605 | 0.6587 | 0.5422 | 0.4161 |
| | **NAFSMF** | 0.9612 | 0.9216 | 0.8767 | 0.8305 | 0.7800 | 0.7211 | 0.6540 | 0.5777 | 0.4671 |
| | **DAMF** | 0.9884 | 0.9748 | 0.9572 | 0.9356 | 0.9086 | 0.8738 | 0.8237 | 0.7466 | 0.6037 |
| | **AWMF** | 0.9720 | 0.9616 | 0.9487 | 0.9343 | 0.9135 | 0.8824 | 0.8331 | 0.7550 | 0.6108 |
| | **ARmF** | **0.9915** | **0.9818** | **0.9689** | **0.9523** | **0.9294** | **0.8960** | **0.8442** | **0.7630** | **0.6150** |
| **Biber** | **BPDF** | 0.9735 | 0.9460 | 0.9158 | 0.8798 | 0.8363 | 0.7780 | 0.7001 | 0.5584 | 0.2194 |
| | **MDBUTMF** | 0.9794 | 0.9331 | 0.8263 | 0.7884 | 0.8321 | 0.8484 | 0.8206 | 0.7382 | 0.4131 |
| | **DBA** | 0.9742 | 0.9508 | 0.9239 | 0.8909 | 0.8535 | 0.8034 | 0.7387 | 0.6565 | 0.5402 |
| | **NAFSMF** | 0.9772 | 0.9551 | 0.9328 | 0.9068 | 0.8810 | 0.8512 | 0.8154 | 0.7665 | 0.6470 |
| | **DAMF** | 0.9804 | 0.9594 | 0.9372 | 0.9110 | 0.8835 | 0.8515 | 0.8152 | 0.7707 | 0.7018 |
| | **AWMF** | 0.9609 | 0.9560 | 0.9410 | 0.9204 | 0.8952 | 0.8633 | 0.8256 | 0.7789 | 0.7096 |
| | **ARmF** | **0.9826** | **0.9640** | **0.9439** | **0.9205** | **0.8939** | **0.8618** | **0.8241** | **0.7779** | **0.7096** |
| **Oturma odası** | **BPDF** | 0.9747 | 0.9432 | 0.9056 | 0.8569 | 0.7962 | 0.7153 | 0.6012 | 0.4372 | 0.2337 |
| | **MDBUTMF** | 0.9764 | 0.9338 | 0.8567 | 0.8137 | 0.8251 | 0.8066 | 0.7621 | 0.6682 | 0.3744 |
| | **DBA** | 0.9802 | 0.9557 | 0.9251 | 0.8857 | 0.8368 | 0.7693 | 0.6888 | 0.5838 | 0.4565 |
| | **NAFSMF** | 0.9704 | 0.9382 | 0.9047 | 0.8687 | 0.8301 | 0.7839 | 0.7329 | 0.6678 | 0.5472 |
| | **DAMF** | 0.9846 | 0.9654 | 0.9422 | 0.9152 | 0.8824 | 0.8443 | 0.7976 | 0.7325 | 0.6295 |
| | **AWMF** | 0.9693 | 0.9539 | 0.9358 | 0.9144 | 0.8879 | 0.8523 | 0.8062 | 0.7394 | 0.6356 |
| | **ARmF** | **0.9856** | **0.9699** | **0.9514** | **0.9294** | **0.9018** | **0.8653** | **0.8171** | **0.7483** | **0.6418** |
| **Göl** | **BPDF** | 0.9795 | 0.9526 | 0.9218 | 0.8796 | 0.8253 | 0.7468 | 0.6464 | 0.4839 | 0.2226 |
| | **MDBUTMF** | 0.9802 | 0.9275 | 0.8097 | 0.7749 | 0.8177 | 0.8374 | 0.8066 | 0.7192 | 0.4084 |
| | **DBA** | 0.9768 | 0.9565 | 0.9315 | 0.8988 | 0.8561 | 0.7984 | 0.7228 | 0.6267 | 0.5053 |
| | **NAFSMF** | 0.9754 | 0.9489 | 0.9210 | 0.8925 | 0.8588 | 0.8229 | 0.7805 | 0.7221 | 0.6021 |
| | **DAMF** | 0.9856 | 0.9690 | 0.9499 | 0.9285 | 0.9020 | 0.8689 | 0.8293 | 0.7737 | 0.6842 |
| | **AWMF** | 0.9742 | 0.9620 | 0.9474 | 0.9297 | 0.9067 | 0.8758 | 0.8361 | 0.7799 | 0.6904 |
| | **ARmF** | **0.9867** | **0.9716** | **0.9553** | **0.9361** | **0.9113** | **0.8793** | **0.8391** | **0.7828** | **0.6926** |

Tablo 9
Uçak, tepe, korsan, tekne, ev ve köprü görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları

| | **Filtreler** | **%10** | **%20** | **%30** | **%40** | **%50** | **%60** | **%70** | **%80** | **%90** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Uçak** | **BPDF** | 0.9885 | 0.9733 | 0.9533 | 0.9220 | 0.8797 | 0.8194 | 0.7309 | 0.5631 | 0.1894 |
| | **MDBUTMF** | 0.9884 | 0.9317 | 0.7907 | 0.7539 | 0.8392 | 0.8978 | 0.8833 | 0.7857 | 0.3518 |
| | **DBA** | 0.9885 | 0.9781 | 0.9642 | 0.9423 | 0.9124 | 0.8706 | 0.8139 | 0.7343 | 0.6268 |
| | **NAFSMF** | 0.9845 | 0.9685 | 0.9524 | 0.9334 | 0.9136 | 0.8892 | 0.8596 | 0.8175 | 0.7019 |
| | **DAMF** | 0.9938 | 0.9861 | 0.9769 | 0.9648 | 0.9505 | 0.9331 | 0.9086 | 0.8714 | 0.7987 |
| | **AWMF** | 0.9850 | 0.9796 | 0.9733 | 0.9645 | 0.9532 | 0.9376 | 0.9133 | 0.8760 | 0.8055 |
| | **ARmF** | **0.9947** | **0.9887** | **0.9816** | **0.9719** | **0.9599** | **0.9433** | **0.9182** | **0.8795** | **0.8080** |
| **Tepe** | **BPDF** | 0.9761 | 0.9480 | 0.9129 | 0.8676 | 0.8062 | 0.7275 | 0.6232 | 0.4954 | 0.3573 |
| | **MDBUTMF** | 0.9781 | 0.9340 | 0.8335 | 0.7938 | 0.8193 | 0.8220 | 0.7827 | 0.6976 | 0.3921 |
| | **DBA** | 0.9801 | 0.9578 | 0.9287 | 0.8912 | 0.8410 | 0.7784 | 0.6997 | 0.6036 | 0.4833 |
| | **NAFSMF** | 0.9733 | 0.9451 | 0.9148 | 0.8824 | 0.8463 | 0.8064 | 0.7585 | 0.7010 | 0.5843 |
| | **DAMF** | 0.9841 | 0.9656 | 0.9438 | 0.9181 | 0.8875 | 0.8515 | 0.8075 | 0.7495 | 0.6571 |
| | **AWMF** | 0.9724 | 0.9576 | 0.9409 | 0.9195 | 0.8929 | 0.8593 | 0.8152 | 0.7562 | 0.6632 |
| | **ARmF** | **0.9860** | **0.9703** | **0.9526** | **0.9310** | **0.9038** | **0.8690** | **0.8240** | **0.7626** | **0.6672** |
| **Korsan** | **BPDF** | 0.9801 | 0.9549 | 0.9232 | 0.8817 | 0.8266 | 0.7506 | 0.6494 | 0.4797 | 0.2741 |
| | **MDBUTMF** | 0.9813 | 0.9381 | 0.8418 | 0.8072 | 0.8363 | 0.8430 | 0.8096 | 0.7178 | 0.4185 |
| | **DBA** | 0.9832 | 0.9637 | 0.9387 | 0.9062 | 0.8605 | 0.8017 | 0.7286 | 0.6247 | 0.5002 |
| | **NAFSMF** | 0.9766 | 0.9511 | 0.9248 | 0.8970 | 0.8635 | 0.8251 | 0.7844 | 0.7227 | 0.6093 |
| | **DAMF** | 0.9875 | 0.9722 | 0.9542 | 0.9332 | 0.9063 | 0.8744 | 0.8362 | 0.7784 | 0.6853 |
| | **AWMF** | 0.9753 | 0.9624 | 0.9489 | 0.9322 | 0.9088 | 0.8790 | 0.8417 | 0.7834 | 0.6913 |
| | **ARmF** | **0.9884** | **0.9750** | **0.9600** | **0.9424** | **0.9181** | **0.8875** | **0.8487** | **0.7886** | **0.6939** |
| **Tekne** | **BPDF** | 0.9753 | 0.9456 | 0.9085 | 0.8608 | 0.8010 | 0.7245 | 0.6155 | 0.4697 | 0.2851 |
| | **MDBUTMF** | 0.9783 | 0.9353 | 0.8450 | 0.8064 | 0.8268 | 0.8243 | 0.7833 | 0.6906 | 0.3796 |
| | **DBA** | 0.9767 | 0.9532 | 0.9239 | 0.8844 | 0.8396 | 0.7785 | 0.6968 | 0.5992 | 0.4825 |
| | **NAFSMF** | 0.9723 | 0.9422 | 0.9115 | 0.8766 | 0.8414 | 0.8005 | 0.7528 | 0.6898 | 0.5778 |
| | **DAMF** | 0.9833 | 0.9634 | 0.9407 | 0.9123 | 0.8829 | 0.8463 | 0.8011 | 0.7419 | 0.6514 |
| | **AWMF** | 0.9706 | 0.9555 | 0.9375 | 0.9146 | 0.8887 | 0.8543 | 0.8091 | 0.7483 | 0.6571 |
| | **ARmF** | **0.9842** | **0.9664** | **0.9467** | **0.9223** | **0.8957** | **0.8606** | **0.8142** | **0.7529** | **0.6610** |
| **Ev** | **BPDF** | 0.9938 | 0.9858 | 0.9730 | 0.9550 | 0.9241 | 0.8835 | 0.8113 | 0.7002 | 0.4932 |
| | **MDBUTMF** | 0.9950 | 0.9491 | 0.8178 | 0.7831 | 0.8833 | 0.9449 | 0.9425 | 0.8641 | 0.4270 |
| | **DBA** | 0.9969 | 0.9920 | 0.9832 | 0.9703 | 0.9522 | 0.9238 | 0.8777 | 0.8142 | 0.7234 |
| | **NAFSMF** | 0.9914 | 0.9831 | 0.9733 | 0.9643 | 0.9535 | 0.9405 | 0.9210 | 0.8918 | 0.7827 |
| | **DAMF** | 0.9982 | 0.9955 | 0.9912 | 0.9861 | 0.9796 | 0.9709 | 0.9577 | 0.9376 | 0.8852 |
| | **AWMF** | 0.9933 | 0.9924 | 0.9905 | 0.9878 | 0.9834 | 0.9760 | 0.9630 | 0.9426 | 0.8948 |
| | **ARmF** | **0.9987** | **0.9970** | **0.9946** | **0.9913** | **0.9863** | **0.9786** | **0.9652** | **0.9446** | **0.8962** |
| **Köprü** | **BPDF** | 0.9705 | 0.9335 | 0.8856 | 0.8269 | 0.7503 | 0.6452 | 0.5159 | 0.3648 | 0.1815 |
| | **MDBUTMF** | 0.9699 | 0.9236 | 0.8433 | 0.7994 | 0.7855 | 0.7572 | 0.6950 | 0.6000 | 0.3651 |
| | **DBA** | 0.9728 | 0.9424 | 0.9047 | 0.8552 | 0.7917 | 0.7104 | 0.6060 | 0.4880 | 0.3518 |
| | **NAFSMF** | 0.9631 | 0.9222 | 0.8788 | 0.8337 | 0.7818 | 0.7237 | 0.6544 | 0.5766 | 0.4578 |
| | **DAMF** | 0.9798 | 0.9560 | 0.9276 | 0.8953 | 0.8563 | 0.8072 | 0.7465 | 0.6667 | 0.5415 |
| | **AWMF** | 0.9638 | 0.9440 | 0.9209 | 0.8948 | 0.8611 | 0.8148 | 0.7551 | 0.6736 | 0.5469 |
| | **ARmF** | **0.9823** | **0.9621** | **0.9385** | **0.9113** | **0.8762** | **0.8285** | **0.7663** | **0.6819** | **0.5515** |

Tablo 10
Elaine, çakmaktaşlar, çiçek, papağan, koyu saçlı kadın ve sarışın kadın görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları

| | Filtreler | %10 | %20 | %30 | %40 | %50 | %60 | %70 | %80 | %90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Elaine** | **BPDF** | 0.9707 | 0.9405 | 0.9052 | 0.8649 | 0.8149 | 0.7517 | 0.6628 | 0.4927 | 0.2911 |
| | **MDBUTMF** | 0.9774 | 0.9324 | 0.8347 | 0.7965 | 0.8224 | 0.8295 | 0.7925 | 0.6973 | 0.3492 |
| | **DBA** | 0.9746 | 0.9483 | 0.9173 | 0.8800 | 0.8358 | 0.7832 | 0.7157 | 0.6292 | 0.5121 |
| | **NAFSMF** | 0.9774 | 0.9542 | 0.9295 | 0.9025 | 0.8730 | 0.8404 | 0.8010 | 0.7470 | 0.6310 |
| | **DAMF** | 0.9774 | 0.9534 | 0.9270 | 0.8961 | 0.8620 | 0.8230 | 0.7784 | 0.7248 | 0.6584 |
| | **AWMF** | 0.9684 | 0.9514 | 0.9296 | 0.9021 | 0.8696 | 0.8313 | 0.7857 | 0.7310 | 0.6640 |
| | **ARmF** | **0.9773** | **0.9532** | **0.9272** | **0.8971** | **0.8630** | **0.8239** | **0.7791** | **0.7270** | **0.6631** |
| **Çakmaktaşlar** | **BPDF** | 0.9726 | 0.9417 | 0.9021 | 0.8550 | 0.7912 | 0.7099 | 0.5908 | 0.4125 | 0.1259 |
| | **MDBUTMF** | 0.9764 | 0.9304 | 0.8315 | 0.7932 | 0.8169 | 0.8128 | 0.7671 | 0.6735 | 0.3965 |
| | **DBA** | 0.9769 | 0.9533 | 0.9210 | 0.8793 | 0.8239 | 0.7487 | 0.6490 | 0.5308 | 0.3807 |
| | **NAFSMF** | 0.9659 | 0.9333 | 0.8983 | 0.8631 | 0.8220 | 0.7743 | 0.7165 | 0.6464 | 0.5215 |
| | **DAMF** | 0.9840 | 0.9658 | 0.9430 | 0.9173 | 0.8865 | 0.8464 | 0.7980 | 0.7268 | 0.6061 |
| | **AWMF** | 0.9551 | 0.9502 | 0.9364 | 0.9167 | 0.8908 | 0.8541 | 0.8058 | 0.7334 | 0.6118 |
| | **ARmF** | **0.9847** | **0.9688** | **0.9491** | **0.9267** | **0.8987** | **0.8608** | **0.8112** | **0.7381** | **0.6154** |
| **Çiçek** | **BPDF** | 0.9808 | 0.9618 | 0.9346 | 0.8998 | 0.8446 | 0.7718 | 0.6634 | 0.4970 | 0.2249 |
| | **MDBUTMF** | 0.9820 | 0.9486 | 0.8681 | 0.8407 | 0.8732 | 0.8832 | 0.8523 | 0.7679 | 0.4292 |
| | **DBA** | 0.9854 | 0.9722 | 0.9517 | 0.9259 | 0.8841 | 0.8330 | 0.7579 | 0.6588 | 0.5230 |
| | **NAFSMF** | 0.9763 | 0.9568 | 0.9363 | 0.9143 | 0.8883 | 0.8600 | 0.8218 | 0.7682 | 0.6492 |
| | **DAMF** | 0.9878 | 0.9786 | 0.9662 | 0.9513 | 0.9321 | 0.9089 | 0.8772 | 0.8290 | 0.7404 |
| | **AWMF** | 0.9752 | 0.9684 | 0.9594 | 0.9488 | 0.9333 | 0.9126 | 0.8820 | 0.8340 | 0.7459 |
| | **ARmF** | **0.9877** | **0.9796** | **0.9696** | **0.9577** | **0.9411** | **0.9195** | **0.8876** | **0.8384** | **0.7489** |
| **Papağan** | **BPDF** | 0.9791 | 0.9663 | 0.9490 | 0.9270 | 0.8992 | 0.8580 | 0.7955 | 0.6816 | 0.3541 |
| | **MDBUTMF** | 0.9771 | 0.9334 | 0.8242 | 0.7958 | 0.8655 | 0.9042 | 0.8911 | 0.8123 | 0.4008 |
| | **DBA** | 0.9840 | 0.9741 | 0.9607 | 0.9440 | 0.9209 | 0.8900 | 0.8467 | 0.7871 | 0.6951 |
| | **NAFSMF** | 0.9785 | 0.9653 | 0.9519 | 0.9380 | 0.9209 | 0.9030 | 0.8774 | 0.8418 | 0.7331 |
| | **DAMF** | 0.9839 | 0.9763 | 0.9666 | 0.9563 | 0.9423 | 0.9270 | 0.9064 | 0.8775 | 0.8226 |
| | **AWMF** | 0.9779 | 0.9727 | 0.9655 | 0.9572 | 0.9457 | 0.9316 | 0.9112 | 0.8828 | 0.8309 |
| | **ARmF** | **0.9851** | **0.9786** | **0.9706** | **0.9621** | **0.9499** | **0.9351** | **0.9141** | **0.8848** | **0.8320** |
| **Koyu saçlı kadın** | **BPDF** | 0.9909 | 0.9802 | 0.9665 | 0.9471 | 0.9200 | 0.8789 | 0.8100 | 0.6828 | 0.4483 |
| | **MDBUTMF** | 0.9923 | 0.9395 | 0.7833 | 0.7576 | 0.8620 | 0.9294 | 0.9272 | 0.8566 | 0.4772 |
| | **DBA** | 0.9925 | 0.9850 | 0.9754 | 0.9614 | 0.9414 | 0.9133 | 0.8715 | 0.8065 | 0.7056 |
| | **NAFSMF** | 0.9906 | 0.9815 | 0.9723 | 0.9622 | 0.9513 | 0.9361 | 0.9192 | 0.8891 | 0.7756 |
| | **DAMF** | 0.9950 | 0.9891 | 0.9826 | 0.9743 | 0.9647 | 0.9525 | 0.9362 | 0.9134 | 0.8664 |
| | **AWMF** | 0.9910 | 0.9870 | 0.9823 | 0.9761 | 0.9678 | 0.9565 | 0.9404 | 0.9177 | 0.8744 |
| | **ARmF** | **0.9956** | **0.9909** | **0.9854** | **0.9787** | **0.9701** | **0.9585** | **0.9420** | **0.9189** | **0.8753** |
| **Sarışın kadın** | **BPDF** | 0.9657 | 0.9385 | 0.9055 | 0.8664 | 0.8191 | 0.7561 | 0.6624 | 0.5003 | 0.2184 |
| | **MDBUTMF** | 0.9642 | 0.9236 | 0.8294 | 0.7952 | 0.8214 | 0.8258 | 0.7936 | 0.7017 | 0.3539 |
| | **DBA** | 0.9666 | 0.9449 | 0.9184 | 0.8856 | 0.8441 | 0.7938 | 0.7259 | 0.6470 | 0.5432 |
| | **NAFSMF** | 0.9606 | 0.9366 | 0.9104 | 0.8833 | 0.8526 | 0.8184 | 0.7805 | 0.7259 | 0.6113 |
| | **DAMF** | 0.9700 | 0.9518 | 0.9301 | 0.9053 | 0.8764 | 0.8424 | 0.8015 | 0.7505 | 0.6753 |
| | **AWMF** | 0.9579 | 0.9450 | 0.9273 | 0.9061 | 0.8802 | 0.8476 | 0.8069 | 0.7554 | 0.6814 |
| | **ARmF** | **0.9718** | **0.9551** | **0.9355** | **0.9132** | **0.8864** | **0.8531** | **0.8114** | **0.7582** | **0.6825** |

Tablo 11
Einstein görüntüsü için filtrelerin SSIM sonuçları

| | Filtreler | %10 | %20 | %30 | %40 | %50 | %60 | %70 | %80 | %90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Einstein** | **BPDF** | 0.9830 | 0.9614 | 0.9361 | 0.9051 | 0.8640 | 0.8085 | 0.7315 | 0.5892 | 0.3465 |
| | **MDBUTMF** | 0.9833 | 0.9418 | 0.8476 | 0.8127 | 0.8528 | 0.8677 | 0.8393 | 0.7561 | 0.4127 |
| | **DBA** | 0.9867 | 0.9706 | 0.9500 | 0.9236 | 0.8881 | 0.8449 | 0.7839 | 0.7102 | 0.6142 |
| | **NAFSMF** | 0.9801 | 0.9591 | 0.9364 | 0.9132 | 0.8878 | 0.8591 | 0.8231 | 0.7732 | 0.6698 |
| | **DAMF** | 0.9894 | 0.9765 | 0.9619 | 0.9445 | 0.9244 | 0.8989 | 0.8666 | 0.8208 | 0.7472 |
| | **AWMF** | 0.9798 | 0.9701 | 0.9588 | 0.9450 | 0.9280 | 0.9043 | 0.8724 | 0.8259 | 0.7531 |
| | **ARmF** | **0.9911** | **0.9805** | **0.9687** | **0.9543** | **0.9367** | **0.9121** | **0.8788** | **0.8305** | **0.7551** |

Bu problem için, $\mu_t^{ij}$ notasyonu $i$'inci filtre ve $j$'inci gürültü yoğunluğu için $t$'inci görüntüden elde edilen ve Tablo 7, 8, 9, 10 ve 11'de verilen SSIM sonuçlarını göstermektedir. Burada, $\nu_t^{ij} = 1 - \mu_t^{ij}$ ve $\pi_t^{ij} = 0$, olduğundan $i \in I_7$, $j \in I_9$ ve $t \in I_{20}$ olmak üzere, $[a_{ij}]$ *d*-matrisi için,

$$\alpha_{ij}^a := \left[ \frac{\min\limits_t \mu_t^{ij}}{\max\limits_t \mu_t^{ij} + \max\limits_t \{1 - \mu_t^{ij}\}}, \frac{\max\limits_t \mu_t^{ij}}{\max\limits_t \mu_t^{ij} + \max\limits_t \{1 - \mu_t^{ij}\}} \right]$$

ve

$$\beta_{ij}^a := \left[ \frac{\min\limits_t \{1 - \mu_t^{ij}\}}{\max\limits_t \mu_t^{ij} + \max\limits_t \{1 - \mu_t^{ij}\}}, \frac{\max\limits_t \{1 - \mu_t^{ij}\}}{\max\limits_t \mu_t^{ij} + \max\limits_t \{1 - \mu_t^{ij}\}} \right]$$

biçimindedir. Örneğin,

$$\begin{aligned}(\mu_t^{54}) = \ & (0.9488, 0.9759, 0.9013, 0.9356, 0.9110, 0.9152, 0.9285, 0.9648, 0.9181, 0.9332, \\ & 0.9123, 0.9861, 0.8953, 0.8961, 0.9173, 0.9513, 0.9563, 0.9743, 0.9053, 0.9445)\end{aligned}$$

sıralı 20'lisi %40 gürültü yoğunluğunda yirmi geleneksel görüntü için DAMF'ın SSIM sonuçlarını göstermektedir. O halde,

$$\begin{aligned}\alpha_{54}^a &= \left[ \tfrac{\min\limits_t \mu_t^{54}}{\max\limits_t \mu_t^{54} + \max\limits_t \{1-\mu_t^{54}\}}, \tfrac{\max\limits_t \mu_t^{54}}{\max\limits_t \mu_t^{54} + \max\limits_t \{1-\mu_t^{54}\}} \right] \\ &= \left[ \tfrac{0.8953}{0.9861+0.1047}, \tfrac{0.9861}{0.9861+0.1047} \right] \\ &= [0.8207, 0.9040]\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\beta^a_{54} &= \left[\frac{\min\limits_t\{1-\mu_t^{54}\}}{\max\limits_t \mu_t^{54}+\max\limits_t\{1-\mu_t^{54}\}}, \frac{\max\limits_t\{1-\mu_t^{54}\}}{\max\limits_t \mu_t^{54}+\max\limits_t\{1-\mu_t^{54}\}}\right] \\
&= \left[\frac{0.0139}{0.9861+0.1047}, \frac{0.1047}{0.9861+0.1047}\right] \\
&= [0.0127, 0.0960]
\end{aligned}
$$

olduğundan $a_{54} = \begin{smallmatrix}{[0.8207,0.9040]} \\ {[0.0127,0.0960]}\end{smallmatrix}$ olarak elde edilir. Burada, $[0.8207, 0.9040]$ değeri %40 gürültü yoğunluğunda DAMF'ın gürültü gidermede (yani bozuk pikselleri düzeltmede) başarılı olma durumunun yaklaşık olarak %82 ile %90 arasında değiştiğini göstermektedir. Ayrıca, $[0.0127, 0.0960]$ değeri %40 gürültü yoğunluğunda DAMF'ın gürültü gidermede başarısız olma durumunun da yaklaşık olarak %1 ile %9 arasında değiştiğini ifade etmektedir. Benzer şekilde, $[a_{ij}]$ $d$-matrisinin sıfır indisli satırları hariç diğer satırları elde edilir.

Ayrıca, bu problemde, filtrelerin gürültü giderme performanslarının, gürültülü piksellerin bozulmamış piksellerden daha fazla olduğu yüksek gürültü yoğunluklarında daha önemli olduğunu varsayılmaktadır. Dolayısıyla, yüksek gürültü yoğunluklarındaki performans temelli başarı diğer yoğunluklardan daha önemli olacaktır. Örneğin,

$$
[a_{01}] = \begin{bmatrix}
{[0,0.01]} & {[0,0.05]} & {[0,0.1]} & {[0.05,0.35]} & {[0.2,0.45]} & {[0.25,0.5]} & {[0.8,0.85]} & {[0.85,0.9]} & {[0.9,0.95]} \\
{[0.9,0.95]} & {[0.85,0.9]} & {[0.8,0.85]} & {[0.25,0.5]} & {[0.2,0.45]} & {[0.05,0.35]} & {[0,0.1]} & {[0,0.05]} & {[0,0.01]}
\end{bmatrix}
$$

olsun. Böylece, Tablo 7, 8, 9, 10 ve 11'deki değerleri modelleyen aşağıdaki $[a_{ij}]$ $d$-matrisi elde edilir.

$$
[a_{ij}] = \begin{bmatrix}
\begin{matrix}{[0,0.01]}\\{[0.9,0.95]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0,0.05]}\\{[0.85,0.9]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0,0.1]}\\{[0.8,0.85]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.05,0.35]}\\{[0.25,0.5]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.2,0.45]}\\{[0.2,0.45]}\end{matrix} \\
\begin{matrix}{[0.9392,0.9666]}\\{[0.0060,0.0334]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.8872,0.9368]}\\{[0.0135,0.0632]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.8145,0.8948]}\\{[0.0248,0.1052]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.7330,0.8465]}\\{[0.0399,0.1535]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.6392,0.7873]}\\{[0.0646,0.2127]}\end{matrix} \\
\begin{matrix}{[0.9355,0.9653]}\\{[0.0049,0.0347]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.8991,0.9248]}\\{[0.0496,0.0752]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.7221,0.8002]}\\{[0.1216,0.1998]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.6937,0.7736]}\\{[0.1465,0.2264]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.7155,0.8046]}\\{[0.1063,0.1954]}\end{matrix} \\
\begin{matrix}{[0.9383,0.9676]}\\{[0.0030,0.0324]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.8978,0.9451]}\\{[0.0076,0.0549]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.8388,0.9116]}\\{[0.0156,0.0884]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.7669,0.8702]}\\{[0.0266,0.1298]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.6822,0.8205]}\\{[0.0412,0.1795]}\end{matrix} \\
\begin{matrix}{[0.9319,0.9618]}\\{[0.0084,0.0382]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.8682,0.9261]}\\{[0.0159,0.0739]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.7994,0.8875]}\\{[0.0243,0.1125]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.7325,0.8505]}\\{[0.0314,0.1495]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.6648,0.8125]}\\{[0.0397,0.1875]}\end{matrix} \\
\begin{matrix}{[0.9433,0.9708]}\\{[0.0018,0.0292]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.9119,0.9538]}\\{[0.0043,0.0462]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.8710,0.9314]}\\{[0.0082,0.0686]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.8207,0.9040]}\\{[0.0127,0.0960]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.7623,0.8721]}\\{[0.0182,0.1279]}\end{matrix} \\
\begin{matrix}{[0.9200,0.9568]}\\{[0.0065,0.0432]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.9003,0.9465]}\\{[0.0073,0.0535]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.8610,0.9261]}\\{[0.0089,0.0739]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.8187,0.9038]}\\{[0.0112,0.0962]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.7673,0.8762]}\\{[0.0148,0.1238]}\end{matrix} \\
\begin{matrix}{[0.9463,0.9725]}\\{[0.0013,0.0275]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.9131,0.9551]}\\{[0.0028,0.0449]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.8687,0.9318]}\\{[0.0051,0.0682]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.8199,0.9060]}\\{[0.0079,0.0940]}\end{matrix} & \begin{matrix}{[0.7682,0.8780]}\\{[0.0122,0.1220]}\end{matrix}
\end{bmatrix}
$$

$$
\left.\begin{matrix}
\begin{matrix}[0.25,0.5]\\ [0.05,0.35]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.8,0.85]\\ [0,0.1]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.85,0.9]\\ [0,0.05]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.9,0.95]\\ [0,0.01]\end{matrix}\\
\begin{matrix}[0.5210,0.7135]\\ [0.0940,0.2865]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.3982,0.6263]\\ [0.1456,0.3737]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.2732,0.5243]\\ [0.2245,0.4757]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.0909,0.3687]\\ [0.3535,0.6313]\end{matrix}\\
\begin{matrix}[0.6376,0.7956]\\ [0.0464,0.2044]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.5572,0.7555]\\ [0.0461,0.2445]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.4747,0.6836]\\ [0.1075,0.3164]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.3096,0.4230]\\ [0.4635,0.5770]\end{matrix}\\
\begin{matrix}[0.5855,0.7614]\\ [0.0628,0.2386]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.4766,0.6902]\\ [0.0962,0.3098]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.3680,0.6139]\\ [0.1401,0.3861]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.2565,0.5274]\\ [0.2017,0.4726]\end{matrix}\\
\begin{matrix}[0.5913,0.7713]\\ [0.0488,0.2287]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.5162,0.7269]\\ [0.0623,0.2731]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.4384,0.6781]\\ [0.0823,0.3219]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.3455,0.5908]\\ [0.1640,0.4092]\end{matrix}\\
\begin{matrix}[0.6936,0.8343]\\ [0.0250,0.1657]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.6163,0.7907]\\ [0.0349,0.2093]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.5247,0.7378]\\ [0.0491,0.2622]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.4030,0.6588]\\ [0.0854,0.3412]\end{matrix}\\
\begin{matrix}[0.7018,0.8405]\\ [0.0207,0.1595]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.6252,0.7973]\\ [0.0307,0.2027]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.5308,0.7428]\\ [0.0452,0.2572]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.4058,0.6638]\\ [0.0781,0.3362]\end{matrix}\\
\begin{matrix}[0.7135,0.8475]\\ [0.0186,0.1525]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.6392,0.8051]\\ [0.0290,0.1949]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.5401,0.7481]\\ [0.0439,0.2519]\end{matrix} & \begin{matrix}[0.4101,0.6665]\\ [0.0772,0.3335]\end{matrix}
\end{matrix}\right]
$$

Dördüncü olarak, yapılandırılan esnek karar verme metodu $[a_{ij}]$'ye uygulandı. Burada, algoritma sonuçları MATLAB R2020b aracılığıyla elde edildi.

**Adım 2.** $\begin{bmatrix}\alpha_{i1}\\ \beta_{i1}\end{bmatrix}$ sütun matrisi aşağıdak gibi elde edilir.

$$
\begin{bmatrix}\alpha_{i1}\\ \beta_{i1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0.2061,0.5573] & [0.3256,0.6280] & [0.2769,0.6317] & [0.3142,0.6629] & [0.3708,0.7197] & [0.3747,0.7238] & [0.3805,0.7283]\\ [0.0143,0.1151] & [0.0454,0.1309] & [0.0088,0.0977] & [0.0131,0.1078] & [0.0044,0.0730] & [0.0058,0.0774] & [0.0029,0.0700]\end{bmatrix}^T
$$

Burada,

$$
\begin{aligned}
\lambda = \;& \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j=1}^{9}\left(1+\frac{(\alpha_{0j}^a)^-+(\alpha_{0j}^a)^+}{2}-\frac{(\beta_{0j}^a)^-+(\beta_{0j}^a)^+}{2}\right)\\
= \;& \tfrac{1}{2}\left(\left(1+\frac{(\alpha_{01}^a)^-+(\alpha_{01}^a)^+}{2}-\frac{(\beta_{01}^a)^-+(\beta_{01}^a)^+}{2}\right)+\left(1+\frac{(\alpha_{02}^a)^-+(\alpha_{02}^a)^+}{2}-\frac{(\beta_{02}^a)^-+(\beta_{02}^a)^+}{2}\right)\right.\\
& +\left(1+\frac{(\alpha_{03}^a)^-+(\alpha_{03}^a)^+}{2}-\frac{(\beta_{03}^a)^-+(\beta_{03}^a)^+}{2}\right)+\left(1+\frac{(\alpha_{04}^a)^-+(\alpha_{04}^a)^+}{2}-\frac{(\beta_{04}^a)^-+(\beta_{04}^a)^+}{2}\right)\\
& +\left(1+\frac{(\alpha_{05}^a)^-+(\alpha_{05}^a)^+}{2}-\frac{(\beta_{05}^a)^-+(\beta_{05}^a)^+}{2}\right)+\left(1+\frac{(\alpha_{06}^a)^-+(\alpha_{06}^a)^+}{2}-\frac{(\beta_{06}^a)^-+(\beta_{06}^a)^+}{2}\right)\\
& +\left(1+\frac{(\alpha_{07}^a)^-+(\alpha_{07}^a)^+}{2}-\frac{(\beta_{07}^a)^-+(\beta_{07}^a)^+}{2}\right)+\left(1+\frac{(\alpha_{08}^a)^-+(\alpha_{08}^a)^+}{2}-\frac{(\beta_{08}^a)^-+(\beta_{08}^a)^+}{2}\right)\\
& \left.+\left(1+\frac{(\alpha_{09}^a)^-+(\alpha_{09}^a)^+}{2}-\frac{(\beta_{09}^a)^-+(\beta_{09}^a)^+}{2}\right)\right)\\
= \;& \tfrac{1}{2}\Big[\big(1+\tfrac{0+0.1}{2}-\tfrac{0.9+0.95}{2}\big)+\big(1+\tfrac{0+0.05}{2}-\tfrac{0.85+0.9}{2}\big)+\big(1+\tfrac{0+0.1}{2}-\tfrac{0.8+0.85}{2}\big)\\
& +\big(1+\tfrac{0.05+0.35}{2}-\tfrac{0.25+0.5}{2}\big)+\big(1+\tfrac{0.2+0.45}{2}-\tfrac{0.2+0.45}{2}\big)+\big(1+\tfrac{0.25+0.5}{2}-\tfrac{0.05+0.35}{2}\big)\\
& +\big(1+\tfrac{0.8+0.85}{2}-\tfrac{0+0.1}{2}\big)+\big(1+\tfrac{0.85+0.9}{2}-\tfrac{0+0.05}{2}\big)+\big(1+\tfrac{0.9+0.95}{2}-\tfrac{0+0.01}{2}\big)\Big]\\
= \;& 4.5
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} = & \ \tfrac{1}{\lambda}\textstyle\sum_{j=1}^{9}\alpha_{0j}^{a}\alpha_{1j}^{a} \\
= & \ \tfrac{1}{4.5}\left(\alpha_{01}^{a}\alpha_{11}^{a}+\alpha_{02}^{a}\alpha_{12}^{a}+\alpha_{03}^{a}\alpha_{13}^{a}+\alpha_{04}^{a}\alpha_{14}^{a}+\alpha_{05}^{a}\alpha_{15}^{a}+\alpha_{06}^{a}\alpha_{16}^{a}+\alpha_{07}^{a}\alpha_{17}^{a}+\alpha_{08}^{a}\alpha_{18}^{a}+\alpha_{09}^{a}\alpha_{19}^{a}\right) \\
= & \ \tfrac{1}{4.5}\left([0,0.01]\cdot[0.9392,0.9666]+[0,0.05]\cdot[0.8872,0.9368]+[0,0.1]\cdot[0.8145,0.8948]\right. \\
& +[0.05,0.35]\cdot[0.7330,0.8465]+[0.2,0.45]\cdot[0.6392,0.7873]+[0.25,0.5]\cdot[0.5210,0.7135] \\
& \left.+[0.8,0.85]\cdot[0.3982,0.6263]+[0.85,0.9]\cdot[0.2732,0.5243]+[0.9,0.95]\cdot[0.0909,0.3687]\right) \\
= & \ [0.2061,0.5573]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\beta_{11} = & \ \tfrac{1}{\lambda}\textstyle\sum_{j=1}^{9}\beta_{0j}^{a}\beta_{1j}^{a} \\
= & \ \tfrac{1}{4.5}\left(\beta_{01}^{a}\beta_{11}^{a}+\beta_{02}^{a}\beta_{12}^{a}+\beta_{03}^{a}\beta_{13}^{a}+\beta_{04}^{a}\beta_{14}^{a}+\beta_{05}^{a}\beta_{15}^{a}+\beta_{06}^{a}\beta_{16}^{a}+\beta_{07}^{a}\beta_{17}^{a}+\beta_{08}^{a}\beta_{18}^{a}+\beta_{09}^{a}\beta_{19}^{a}\right) \\
= & \ \tfrac{1}{4.5}\left([0.9,0.95]\cdot[0.0060,0.0334]+[0.85,0.9]\cdot[0.0135,0.0632]+[0.8,0.85]\cdot[0.0248,0.1052]\right. \\
& +[0.25,0.5]\cdot[0.0399,0.1535]+[0.2,0.45]\cdot[0.0646,0.2127]+[0.05,0.35]\cdot[0.0940,0.2865] \\
& \left.+[0,0.1]\cdot[0.1456,0.3737]+[0,0.05]\cdot[0.2245,0.4757]+[0,0.01]\cdot[0.3535,0.6313]\right) \\
= & \ [0.0143,0.1151]
\end{aligned}$$

bçiminde hesaplanır.

**Adım 3.** Skor matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
[s_{i1}] = & \ [[0.0909,0.5430]\ [0.1946,0.5826]\ [0.1792,0.6229]\ [0.2064,0.6498] \\
& \ [0.2977,0.7152]\ [0.2974,0.7181]\ [0.3105,0.7254]]^{T}
\end{aligned}$$

Burada, $s_{11} = \alpha_{11} - \beta_{11} = [0.2061,0.5573] - [0.0143,0.1151] = [0.0909,0.5430]$ biçiminde hesaplanır.

**Adım 4.** Karar kümesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left\{{}^{[0.2228,0.7765]}\text{BPDF},{}^{[0.3498,0.8251]}\text{MDBUTMF},{}^{[0.3309,0.8744]}\text{DBA},{}^{[0.3642,0.9074]}\text{NAFSMF},\right.$$
$$\left.{}^{[0.4761,0.9875]}\text{DAMF},{}^{[0.4757,0.9910]}\text{AWMF},{}^{[0.4917,1]}\text{ARmF}\right\}$$

Burada,

$$d(u_1) = \left[\frac{s_{11}^{-} + |\min_i s_{i1}^{-}|}{\max_i s_{i1}^{+} + |\min_i s_{i1}^{-}|}, \frac{s_{11}^{+} + |\min_i s_{i1}^{-}|}{\max_i s_{i1}^{+} + |\min_i s_{i1}^{-}|}\right] = \left[\frac{0.0909+|0.0909|}{0.7254+|0.0909|}, \frac{0.5430+|0.0909|}{0.7254+|0.0909|}\right] = [0.2228,0.7765]$$

biçiminde hesaplanır.

**Adım 5.** Filtreler için,

$$\text{BPDF} \prec \text{MDBUTMF} \prec \text{DBA} \prec \text{NAFSMF} \prec \text{DAMF} \prec \text{AWMF} \prec \text{ARmF}$$

sıralaması geçerlidir. Dolayısıyla, skor değerleri ARmF'nin diğer filtrelerden daha iyi performans gösterdiğini ifade etmektedir.

Beşinci olarak, "Badem", "Elma", "Balon", "Muz", "Bilardo topları 1", "Bilardo topları 2", "Bina", "İskambil kâğıtları 1", "İskambil kâğıtları 2", "Havuç", "Sandalye", "Ataç", "Madeni para", "Koltuk minderi", "Ördek", "Çit", "Çiçek", "Bahçe masası", "Gitar köprüsü", "Gitar perdesi", "Gitar başı", "Klavye 1", "Klavye 2", "Aslan", "Multimetre", "Kalemler 1", "Kalemler 2", "Sütun", "Plastik", "Çatı", "Atkı", "Vida", "Salyangoz", "Çorap", "Şekerleme", "Domates 1", "Domates 2", "Aletler 1", "Aletler 2" ve "Ahşap oyunu" olarak isimlendirilen ve TESTIMAGES veritabanında yer alan kırk görüntü göz önüne alındı. Bu amaçla, %10'dan %90'a değişen gürültü yoğunluklarında bu görüntüler için filtrelerin SSIM (Wang ve diğerleri, 2004) sonuçları Tablo 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 ve 19'da verildi. Ayrıca, bu tablolardaki koyu renkli değerler, en iyi skor değerlerini göstermektedir.

Tablo 12
Badem, elma ve balon görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları

| | **Filtreler** | **%10** | **%20** | **%30** | **%40** | **%50** | **%60** | **%70** | **%80** | **%90** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Badem** | **BPDF** | 0.9815 | 0.9565 | 0.9220 | 0.8734 | 0.8094 | 0.7182 | 0.5918 | 0.4091 | 0.1692 |
| | **MDBUTMF** | 0.9695 | 0.9275 | 0.8414 | 0.8066 | 0.8317 | 0.8327 | 0.7933 | 0.7099 | 0.4522 |
| | **DBA** | 0.9866 | 0.9693 | 0.9445 | 0.9095 | 0.8597 | 0.7956 | 0.7000 | 0.5838 | 0.4357 |
| | **NAFSMF** | 0.9726 | 0.9444 | 0.9143 | 0.8836 | 0.8486 | 0.8106 | 0.7620 | 0.6975 | 0.5728 |
| | **DAMF** | 0.9879 | 0.9751 | 0.9591 | 0.9396 | 0.9154 | 0.8849 | 0.8421 | 0.7800 | 0.6606 |
| | **AWMF** | 0.9756 | 0.9657 | 0.9543 | 0.9402 | 0.9216 | 0.8947 | 0.8536 | 0.7923 | 0.6785 |
| | **ARmF** | **0.9908** | **0.9809** | **0.9684** | **0.9529** | **0.9329** | **0.9047** | **0.8619** | **0.7985** | **0.6818** |
| **Elma** | **BPDF** | 0.9931 | 0.9836 | 0.9693 | 0.9492 | 0.9185 | 0.8710 | 0.7892 | 0.6355 | 0.3176 |
| | **MDBUTMF** | 0.9861 | 0.9234 | 0.7633 | 0.7325 | 0.8508 | 0.9245 | 0.9204 | 0.8269 | 0.3825 |
| | **DBA** | 0.9958 | 0.9898 | 0.9811 | 0.9687 | 0.9497 | 0.9204 | 0.8780 | 0.8158 | 0.7084 |
| | **NAFSMF** | 0.9867 | 0.9765 | 0.9673 | 0.9586 | 0.9489 | 0.9359 | 0.9182 | 0.8838 | 0.7731 |
| | **DAMF** | 0.9968 | 0.9927 | 0.9876 | 0.9815 | 0.9736 | 0.9630 | 0.9489 | 0.9254 | 0.8722 |
| | **AWMF** | 0.9924 | 0.9896 | 0.9863 | 0.9819 | 0.9758 | 0.9664 | 0.9525 | 0.9302 | 0.8837 |
| | **ARmF** | **0.9973** | **0.9942** | **0.9905** | **0.9858** | **0.9791** | **0.9692** | **0.9549** | **0.9321** | **0.8848** |
| **Balon** | **BPDF** | 0.9935 | 0.9835 | 0.9666 | 0.9425 | 0.9019 | 0.8361 | 0.7327 | 0.5323 | 0.1423 |
| | **MDBUTMF** | 0.9958 | 0.9561 | 0.8386 | 0.8148 | 0.8931 | 0.9454 | 0.9353 | 0.8493 | 0.4394 |
| | **DBA** | 0.9962 | 0.9906 | 0.9805 | 0.9663 | 0.9419 | 0.9036 | 0.8415 | 0.7437 | 0.5973 |
| | **NAFSMF** | 0.9905 | 0.9822 | 0.9737 | 0.9654 | 0.9545 | 0.9412 | 0.9192 | 0.8828 | 0.7618 |
| | **DAMF** | 0.9981 | 0.9950 | 0.9899 | 0.9838 | 0.9752 | 0.9639 | 0.9475 | 0.9197 | 0.8547 |
| | **AWMF** | 0.9921 | 0.9906 | 0.9881 | 0.9845 | 0.9781 | 0.9685 | 0.9526 | 0.9250 | 0.8626 |
| | **ARmF** | **0.9982** | **0.9959** | **0.9927** | **0.9886** | **0.9816** | **0.9715** | **0.9553** | **0.9274** | **0.8645** |

Tablo 13
Muz, bilardo topları 1, bilardo topları 2, bina, iskambil kâğıtları 1 ve iskambil kâğıtları 2 görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları

| | **Filtreler** | **%10** | **%20** | **%30** | **%40** | **%50** | **%60** | **%70** | **%80** | **%90** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Muz** | **BPDF** | 0.9873 | 0.9726 | 0.9557 | 0.9320 | 0.9039 | 0.8535 | 0.7943 | 0.6622 | 0.3133 |
| | **MDBUTMF** | 0.9857 | 0.9160 | 0.7270 | 0.6892 | 0.8178 | 0.9111 | 0.9088 | 0.8294 | 0.4196 |
| | **DBA** | 0.9880 | 0.9769 | 0.9624 | 0.9470 | 0.9258 | 0.8958 | 0.8568 | 0.7971 | 0.7084 |
| | **NAFSMF** | 0.9825 | 0.9688 | 0.9556 | 0.9431 | 0.9299 | 0.9158 | 0.8953 | 0.8654 | 0.7579 |
| | **DAMF** | 0.9854 | 0.9739 | 0.9619 | 0.9488 | 0.9338 | 0.9166 | 0.8967 | 0.8738 | 0.8363 |
| | **AWMF** | 0.9843 | 0.9781 | 0.9690 | 0.9579 | 0.9445 | 0.9282 | 0.9085 | 0.8849 | 0.8506 |
| | **ARmF** | **0.9910** | **0.9821** | **0.9725** | **0.9614** | **0.9481** | **0.9316** | **0.9114** | **0.8870** | **0.8517** |
| **Bilardo topları 1** | **BPDF** | 0.9953 | 0.9888 | 0.9772 | 0.9610 | 0.9371 | 0.8949 | 0.8352 | 0.7112 | 0.3091 |
| | **MDBUTMF** | 0.9915 | 0.9344 | 0.7737 | 0.7401 | 0.8625 | 0.9434 | 0.9460 | 0.8702 | 0.4693 |
| | **DBA** | 0.9967 | 0.9927 | 0.9860 | 0.9759 | 0.9603 | 0.9332 | 0.8920 | 0.8256 | 0.7076 |
| | **NAFSMF** | 0.9886 | 0.9816 | 0.9758 | 0.9692 | 0.9624 | 0.9524 | 0.9385 | 0.9074 | 0.7891 |
| | **DAMF** | 0.9969 | 0.9942 | 0.9905 | 0.9856 | 0.9797 | 0.9716 | 0.9600 | 0.9403 | 0.8897 |
| | **AWMF** | 0.9929 | 0.9921 | 0.9904 | 0.9872 | 0.9828 | 0.9757 | 0.9645 | 0.9452 | 0.9008 |
| | **ARmF** | **0.9981** | **0.9962** | **0.9938** | **0.9901** | **0.9854** | **0.9779** | **0.9665** | **0.9469** | **0.9021** |
| **Bilardo topları 2** | **BPDF** | 0.9901 | 0.9760 | 0.9579 | 0.9332 | 0.8955 | 0.8441 | 0.7720 | 0.6300 | 0.4104 |
| | **MDBUTMF** | 0.9881 | 0.9367 | 0.8030 | 0.7758 | 0.8606 | 0.9127 | 0.9048 | 0.8360 | 0.4991 |
| | **DBA** | 0.9926 | 0.9833 | 0.9713 | 0.9534 | 0.9280 | 0.8912 | 0.8395 | 0.7597 | 0.6365 |
| | **NAFSMF** | 0.9841 | 0.9707 | 0.9582 | 0.9456 | 0.9309 | 0.9140 | 0.8911 | 0.8550 | 0.7407 |
| | **DAMF** | 0.9938 | 0.9869 | 0.9792 | 0.9696 | 0.9574 | 0.9424 | 0.9228 | 0.8914 | 0.8290 |
| | **AWMF** | 0.9861 | 0.9826 | 0.9779 | 0.9710 | 0.9613 | 0.9479 | 0.9287 | 0.8975 | 0.8382 |
| | **ARmF** | **0.9952** | **0.9903** | **0.9844** | **0.9770** | **0.9666** | **0.9526** | **0.9327** | **0.9005** | **0.8401** |
| **Bina** | **BPDF** | 0.9821 | 0.9653 | 0.9343 | 0.8978 | 0.8437 | 0.7647 | 0.6525 | 0.4683 | 0.2105 |
| | **MDBUTMF** | 0.9720 | 0.9262 | 0.8090 | 0.7786 | 0.8392 | 0.8696 | 0.8481 | 0.7770 | 0.4812 |
| | **DBA** | 0.9898 | 0.9770 | 0.9597 | 0.9323 | 0.8968 | 0.8406 | 0.7693 | 0.6602 | 0.5044 |
| | **NAFSMF** | 0.9779 | 0.9583 | 0.9374 | 0.9175 | 0.8943 | 0.8680 | 0.8352 | 0.7835 | 0.6595 |
| | **DAMF** | 0.9870 | 0.9775 | 0.9651 | 0.9508 | 0.9334 | 0.9116 | 0.8814 | 0.8380 | 0.7525 |
| | **AWMF** | 0.9785 | 0.9733 | 0.9658 | 0.9569 | 0.9439 | 0.9239 | 0.8953 | 0.8508 | 0.7668 |
| | **ARmF** | **0.9922** | **0.9860** | **0.9775** | **0.9674** | **0.9535** | **0.9327** | **0.9027** | **0.8568** | **0.7705** |
| **İskambil kâğıtları 1** | **BPDF** | 0.9814 | 0.9533 | 0.9169 | 0.8682 | 0.8009 | 0.7122 | 0.5946 | 0.4137 | 0.1308 |
| | **MDBUTMF** | 0.9755 | 0.9232 | 0.8063 | 0.7603 | 0.8059 | 0.8219 | 0.7821 | 0.6873 | 0.3697 |
| | **DBA** | 0.9837 | 0.9645 | 0.9367 | 0.9006 | 0.8492 | 0.7793 | 0.6883 | 0.5739 | 0.4320 |
| | **NAFSMF** | 0.9719 | 0.9450 | 0.9151 | 0.8833 | 0.8475 | 0.8042 | 0.7542 | 0.6902 | 0.5644 |
| | **DAMF** | 0.9884 | 0.9742 | 0.9556 | 0.9342 | 0.9076 | 0.8727 | 0.8274 | 0.7634 | 0.6506 |
| | **AWMF** | 0.9729 | 0.9613 | 0.9465 | 0.9310 | 0.9081 | 0.8767 | 0.8330 | 0.7687 | 0.6576 |
| | **ARmF** | **0.9890** | **0.9771** | **0.9618** | **0.9448** | **0.9207** | **0.8876** | **0.8420** | **0.7756** | **0.6608** |
| **İskambil kâğıtları 2** | **BPDF** | 0.9894 | 0.9743 | 0.9514 | 0.9200 | 0.8769 | 0.8163 | 0.7329 | 0.5823 | 0.1861 |
| | **MDBUTMF** | 0.9869 | 0.9108 | 0.7237 | 0.6831 | 0.8081 | 0.8924 | 0.8794 | 0.7829 | 0.3547 |
| | **DBA** | 0.9908 | 0.9799 | 0.9638 | 0.9413 | 0.9114 | 0.8682 | 0.8109 | 0.7327 | 0.6220 |
| | **NAFSMF** | 0.9763 | 0.9603 | 0.9452 | 0.9312 | 0.9151 | 0.8946 | 0.8656 | 0.8251 | 0.7005 |
| | **DAMF** | 0.9931 | 0.9856 | 0.9751 | 0.9634 | 0.9486 | 0.9284 | 0.9017 | 0.8641 | 0.7891 |
| | **AWMF** | 0.9826 | 0.9763 | 0.9687 | 0.9596 | 0.9475 | 0.9293 | 0.9039 | 0.8659 | 0.7952 |
| | **ARmF** | **0.9930** | **0.9861** | **0.9774** | **0.9674** | **0.9543** | **0.9352** | **0.9087** | **0.8697** | **0.7978** |

Tablo 14
Havuç, sandalye, ataç, madeni para, koltuk minderi ve ördek görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları

| | Filtreler | %10 | %20 | %30 | %40 | %50 | %60 | %70 | %80 | %90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Havuç** | **BPDF** | 0.9866 | 0.9674 | 0.9435 | 0.9105 | 0.8632 | 0.7871 | 0.6817 | 0.4619 | 0.0861 |
| | **MDBUTMF** | 0.9870 | 0.9321 | 0.7968 | 0.7604 | 0.8451 | 0.8939 | 0.8763 | 0.7746 | 0.3649 |
| | **DBA** | 0.9905 | 0.9779 | 0.9617 | 0.9390 | 0.9047 | 0.8563 | 0.7905 | 0.6857 | 0.5468 |
| | **NAFSMF** | 0.9839 | 0.9666 | 0.9496 | 0.9321 | 0.9108 | 0.8863 | 0.8580 | 0.8120 | 0.6964 |
| | **DAMF** | 0.9929 | 0.9842 | 0.9740 | 0.9620 | 0.9460 | 0.9260 | 0.9001 | 0.8601 | 0.7808 |
| | **AWMF** | 0.9843 | 0.9783 | 0.9713 | 0.9632 | 0.9503 | 0.9327 | 0.9070 | 0.8673 | 0.7903 |
| | **ARmF** | **0.9941** | **0.9874** | **0.9799** | **0.9707** | **0.9574** | **0.9388** | **0.9122** | **0.8712** | **0.7927** |
| **Sandalye** | **BPDF** | 0.9970 | 0.9921 | 0.9831 | 0.9714 | 0.9490 | 0.9164 | 0.8609 | 0.7419 | 0.2090 |
| | **MDBUTMF** | 0.9972 | 0.9473 | 0.8106 | 0.7771 | 0.8912 | 0.9641 | 0.9684 | 0.8949 | 0.4788 |
| | **DBA** | 0.9981 | 0.9954 | 0.9908 | 0.9839 | 0.9710 | 0.9543 | 0.9220 | 0.8690 | 0.7811 |
| | **NAFSMF** | 0.9941 | 0.9904 | 0.9868 | 0.9841 | 0.9797 | 0.9740 | 0.9615 | 0.9359 | 0.8321 |
| | **DAMF** | 0.9989 | 0.9972 | 0.9948 | 0.9917 | 0.9877 | 0.9826 | 0.9758 | 0.9625 | 0.9322 |
| | **AWMF** | 0.9953 | 0.9950 | 0.9939 | 0.9919 | 0.9889 | 0.9843 | 0.9777 | 0.9648 | 0.9389 |
| | **ARmF** | **0.9988** | **0.9974** | **0.9958** | **0.9936** | **0.9902** | **0.9855** | **0.9788** | **0.9657** | **0.9396** |
| **Ataç** | **BPDF** | 0.9869 | 0.9621 | 0.9215 | 0.8606 | 0.7745 | 0.6553 | 0.4958 | 0.3162 | 0.1369 |
| | **MDBUTMF** | 0.9879 | 0.9603 | 0.9024 | 0.8761 | 0.8857 | 0.8747 | 0.8321 | 0.7515 | 0.5460 |
| | **DBA** | 0.9891 | 0.9746 | 0.9511 | 0.9126 | 0.8557 | 0.7733 | 0.6486 | 0.4860 | 0.3059 |
| | **NAFSMF** | 0.9781 | 0.9565 | 0.9313 | 0.9025 | 0.8699 | 0.8305 | 0.7773 | 0.7012 | 0.5657 |
| | **DAMF** | 0.9946 | 0.9864 | 0.9742 | 0.9575 | 0.9359 | 0.9074 | 0.8653 | 0.7970 | 0.6546 |
| | **AWMF** | 0.9763 | 0.9709 | 0.9639 | 0.9532 | 0.9377 | 0.9130 | 0.8719 | 0.8041 | 0.6617 |
| | **ARmF** | **0.9943** | **0.9878** | **0.9788** | **0.9662** | **0.9490** | **0.9227** | **0.8803** | **0.8111** | **0.6668** |
| **Madeni para** | **BPDF** | 0.9782 | 0.9497 | 0.9136 | 0.8693 | 0.8091 | 0.7281 | 0.6254 | 0.4583 | 0.1698 |
| | **MDBUTMF** | 0.9740 | 0.9251 | 0.8243 | 0.7835 | 0.8160 | 0.8207 | 0.7830 | 0.6999 | 0.4357 |
| | **DBA** | 0.9825 | 0.9616 | 0.9351 | 0.8996 | 0.8500 | 0.7863 | 0.7017 | 0.5930 | 0.4745 |
| | **NAFSMF** | 0.9689 | 0.9381 | 0.9068 | 0.8739 | 0.8377 | 0.7967 | 0.7477 | 0.6854 | 0.5658 |
| | **DAMF** | 0.9850 | 0.9688 | 0.9506 | 0.9282 | 0.9012 | 0.8671 | 0.8235 | 0.7596 | 0.6515 |
| | **AWMF** | 0.9691 | 0.9575 | 0.9437 | 0.9263 | 0.9033 | 0.8721 | 0.8285 | 0.7650 | 0.6577 |
| | **ARmF** | **0.9867** | **0.9732** | **0.9582** | **0.9392** | **0.9153** | **0.8825** | **0.8370** | **0.7709** | **0.6609** |
| **Koltuk minderi** | **BPDF** | 0.9937 | 0.9846 | 0.9714 | 0.9522 | 0.9216 | 0.8789 | 0.8096 | 0.6474 | 0.2109 |
| | **MDBUTMF** | 0.9939 | 0.9372 | 0.7809 | 0.7465 | 0.8601 | 0.9421 | 0.9414 | 0.8705 | 0.4778 |
| | **DBA** | 0.9958 | 0.9902 | 0.9820 | 0.9704 | 0.9500 | 0.9224 | 0.8832 | 0.8117 | 0.6952 |
| | **NAFSMF** | 0.9887 | 0.9804 | 0.9729 | 0.9655 | 0.9563 | 0.9454 | 0.9282 | 0.8992 | 0.7862 |
| | **DAMF** | 0.9964 | 0.9927 | 0.9877 | 0.9815 | 0.9739 | 0.9643 | 0.9509 | 0.9304 | 0.8838 |
| | **AWMF** | 0.9921 | 0.9900 | 0.9870 | 0.9829 | 0.9769 | 0.9687 | 0.9555 | 0.9355 | 0.8927 |
| | **ARmF** | **0.9971** | **0.9942** | **0.9907** | **0.9860** | **0.9797** | **0.9710** | **0.9576** | **0.9372** | **0.8939** |
| **Ördek** | **BPDF** | 0.9956 | 0.9891 | 0.9788 | 0.9649 | 0.9443 | 0.9120 | 0.8454 | 0.6864 | 0.3034 |
| | **MDBUTMF** | 0.9955 | 0.9497 | 0.8097 | 0.7855 | 0.8878 | 0.9555 | 0.9531 | 0.8754 | 0.4343 |
| | **DBA** | 0.9973 | 0.9931 | 0.9871 | 0.9773 | 0.9629 | 0.9391 | 0.9001 | 0.8344 | 0.7105 |
| | **NAFSMF** | 0.9953 | 0.9908 | 0.9866 | 0.9815 | 0.9754 | 0.9666 | 0.9512 | 0.9232 | 0.8085 |
| | **DAMF** | 0.9983 | 0.9957 | 0.9922 | 0.9878 | 0.9820 | 0.9746 | 0.9632 | 0.9462 | 0.9047 |
| | **AWMF** | 0.9944 | 0.9930 | 0.9911 | 0.9882 | 0.9835 | 0.9768 | 0.9661 | 0.9497 | 0.9109 |
| | **ARmF** | **0.9983** | **0.9963** | **0.9938** | **0.9905** | **0.9856** | **0.9787** | **0.9677** | **0.9511** | **0.9121** |

Tablo 15
Çit, çiçek, bahçe masası, gitar köprüsü, gitar perdesi ve gitar başı görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları

| | Filtreler | %10 | %20 | %30 | %40 | %50 | %60 | %70 | %80 | %90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Çit** | **BPDF** | 0.9840 | 0.9671 | 0.9458 | 0.9146 | 0.8759 | 0.8153 | 0.7142 | 0.5383 | 0.2133 |
| | **MDBUTMF** | 0.9827 | 0.9489 | 0.8565 | 0.8309 | 0.8772 | 0.9025 | 0.8779 | 0.7935 | 0.4382 |
| | **DBA** | 0.9933 | 0.9833 | 0.9682 | 0.9445 | 0.9121 | 0.8619 | 0.7923 | 0.6810 | 0.5020 |
| | **NAFSMF** | 0.9812 | 0.9671 | 0.9528 | 0.9365 | 0.9193 | 0.8949 | 0.8627 | 0.8121 | 0.6814 |
| | **DAMF** | 0.9934 | 0.9874 | 0.9781 | 0.9654 | 0.9505 | 0.9314 | 0.9044 | 0.8624 | 0.7654 |
| | **AWMF** | 0.9785 | 0.9772 | 0.9735 | 0.9673 | 0.9577 | 0.9415 | 0.9156 | 0.8736 | 0.7781 |
| | **ARmF** | **0.9932** | **0.9888** | **0.9834** | **0.9758** | **0.9651** | **0.9479** | **0.9213** | **0.8785** | **0.7821** |
| **Çiçek** | **BPDF** | 0.9841 | 0.9611 | 0.9272 | 0.8805 | 0.8068 | 0.7058 | 0.5686 | 0.3679 | 0.1790 |
| | **MDBUTMF** | 0.9795 | 0.9374 | 0.8455 | 0.8121 | 0.8456 | 0.8596 | 0.8255 | 0.7449 | 0.4691 |
| | **DBA** | 0.9889 | 0.9742 | 0.9528 | 0.9215 | 0.8738 | 0.8060 | 0.7114 | 0.5790 | 0.3994 |
| | **NAFSMF** | 0.9744 | 0.9486 | 0.9223 | 0.8951 | 0.8619 | 0.8279 | 0.7850 | 0.7231 | 0.5975 |
| | **DAMF** | 0.9920 | 0.9822 | 0.9692 | 0.9540 | 0.9333 | 0.9065 | 0.8698 | 0.8113 | 0.6919 |
| | **AWMF** | 0.9789 | 0.9722 | 0.9640 | 0.9538 | 0.9380 | 0.9139 | 0.8792 | 0.8205 | 0.7021 |
| | **ARmF** | **0.9935** | **0.9861** | **0.9766** | **0.9651** | **0.9478** | **0.9225** | **0.8864** | **0.8262** | **0.7057** |
| **Bahçe masası** | **BPDF** | 0.9751 | 0.9432 | 0.9013 | 0.8477 | 0.7784 | 0.6757 | 0.5549 | 0.3896 | 0.2267 |
| | **MDBUTMF** | 0.9668 | 0.9206 | 0.8333 | 0.7914 | 0.8057 | 0.7969 | 0.7490 | 0.6649 | 0.4036 |
| | **DBA** | 0.9791 | 0.9553 | 0.9229 | 0.8823 | 0.8298 | 0.7527 | 0.6593 | 0.5417 | 0.4017 |
| | **NAFSMF** | 0.9671 | 0.9345 | 0.9000 | 0.8635 | 0.8239 | 0.7761 | 0.7209 | 0.6547 | 0.5321 |
| | **DAMF** | 0.9813 | 0.9619 | 0.9395 | 0.9132 | 0.8826 | 0.8429 | 0.7939 | 0.7274 | 0.6150 |
| | **AWMF** | 0.9671 | 0.9532 | 0.9357 | 0.9156 | 0.8895 | 0.8529 | 0.8042 | 0.7365 | 0.6241 |
| | **ARmF** | **0.9852** | **0.9698** | **0.9513** | **0.9297** | **0.9025** | **0.8646** | **0.8142** | **0.7444** | **0.6286** |
| **Gitar köprüsü** | **BPDF** | 0.9788 | 0.9533 | 0.9239 | 0.8883 | 0.8418 | 0.7791 | 0.7003 | 0.5688 | 0.2842 |
| | **MDBUTMF** | 0.9760 | 0.9137 | 0.7811 | 0.7352 | 0.8024 | 0.8358 | 0.8072 | 0.7157 | 0.3713 |
| | **DBA** | 0.9835 | 0.9645 | 0.9417 | 0.9110 | 0.8730 | 0.8229 | 0.7588 | 0.6751 | 0.5780 |
| | **NAFSMF** | 0.9736 | 0.9465 | 0.9207 | 0.8919 | 0.8628 | 0.8297 | 0.7893 | 0.7384 | 0.6298 |
| | **DAMF** | 0.9845 | 0.9687 | 0.9515 | 0.9311 | 0.9073 | 0.8778 | 0.8410 | 0.7892 | 0.7091 |
| | **AWMF** | 0.9712 | 0.9605 | 0.9477 | 0.9319 | 0.9123 | 0.8853 | 0.8487 | 0.7960 | 0.7167 |
| | **ARmF** | **0.9873** | **0.9753** | **0.9623** | **0.9460** | **0.9256** | **0.8975** | **0.8593** | **0.8043** | **0.7216** |
| **Gitar perdesi** | **BPDF** | 0.9874 | 0.9713 | 0.9480 | 0.9155 | 0.8676 | 0.7955 | 0.6863 | 0.5161 | 0.2784 |
| | **MDBUTMF** | 0.9855 | 0.9343 | 0.8019 | 0.7698 | 0.8459 | 0.8993 | 0.8861 | 0.8056 | 0.4755 |
| | **DBA** | 0.9905 | 0.9805 | 0.9644 | 0.9424 | 0.9111 | 0.8654 | 0.7973 | 0.7073 | 0.5877 |
| | **NAFSMF** | 0.9774 | 0.9577 | 0.9404 | 0.9203 | 0.9000 | 0.8773 | 0.8460 | 0.8021 | 0.6765 |
| | **DAMF** | 0.9898 | 0.9813 | 0.9708 | 0.9581 | 0.9431 | 0.9246 | 0.9002 | 0.8616 | 0.7826 |
| | **AWMF** | 0.9817 | 0.9783 | 0.9726 | 0.9651 | 0.9547 | 0.9390 | 0.9159 | 0.8788 | 0.8041 |
| | **ARmF** | **0.9933** | **0.9882** | **0.9815** | **0.9733** | **0.9621** | **0.9456** | **0.9216** | **0.8836** | **0.8079** |
| **Gitar başı** | **BPDF** | 0.9776 | 0.9520 | 0.9202 | 0.8728 | 0.8103 | 0.7282 | 0.6177 | 0.4492 | 0.2414 |
| | **MDBUTMF** | 0.9731 | 0.9261 | 0.8215 | 0.7830 | 0.8226 | 0.8338 | 0.7966 | 0.7198 | 0.4877 |
| | **DBA** | 0.9848 | 0.9677 | 0.9425 | 0.9094 | 0.8627 | 0.7954 | 0.7086 | 0.5956 | 0.4513 |
| | **NAFSMF** | 0.9685 | 0.9391 | 0.9084 | 0.8764 | 0.8424 | 0.8029 | 0.7531 | 0.6930 | 0.5740 |
| | **DAMF** | 0.9847 | 0.9715 | 0.9546 | 0.9351 | 0.9102 | 0.8787 | 0.8384 | 0.7787 | 0.6698 |
| | **AWMF** | 0.9686 | 0.9606 | 0.9495 | 0.9359 | 0.9159 | 0.8876 | 0.8481 | 0.7882 | 0.6797 |
| | **ARmF** | **0.9873** | **0.9769** | **0.9646** | **0.9493** | **0.9282** | **0.8984** | **0.8574** | **0.7957** | **0.6846** |

Tablo 16
Klavye 1, klavye 2, aslan, multimetre, kalemler 1 ve kalemler 2 görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları

| | Filtreler | %10 | %20 | %30 | %40 | %50 | %60 | %70 | %80 | %90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Klavye 1** | **BPDF** | 0.9845 | 0.9625 | 0.9325 | 0.8908 | 0.8336 | 0.7580 | 0.6575 | 0.5187 | 0.2150 |
| | **MDBUTMF** | 0.9789 | 0.9259 | 0.8036 | 0.7644 | 0.8231 | 0.8467 | 0.8192 | 0.7452 | 0.4959 |
| | **DBA** | 0.9873 | 0.9713 | 0.9489 | 0.9173 | 0.8727 | 0.8064 | 0.7228 | 0.6162 | 0.4966 |
| | **NAFSMF** | 0.9683 | 0.9424 | 0.9154 | 0.8865 | 0.8530 | 0.8132 | 0.7718 | 0.7108 | 0.5895 |
| | **DAMF** | 0.9899 | 0.9786 | 0.9652 | 0.9481 | 0.9259 | 0.8972 | 0.8583 | 0.8003 | 0.6944 |
| | **AWMF** | 0.9735 | 0.9662 | 0.9558 | 0.9426 | 0.9235 | 0.8970 | 0.8596 | 0.8021 | 0.6993 |
| | **ARmF** | **0.9904** | **0.9804** | **0.9687** | **0.9539** | **0.9335** | **0.9055** | **0.8663** | **0.8064** | **0.7005** |
| **Klavye 2** | **BPDF** | 0.9782 | 0.9536 | 0.9214 | 0.8792 | 0.8262 | 0.7503 | 0.6368 | 0.4257 | 0.1368 |
| | **MDBUTMF** | 0.9773 | 0.9410 | 0.8558 | 0.8271 | 0.8557 | 0.8575 | 0.8236 | 0.7307 | 0.4098 |
| | **DBA** | 0.9860 | 0.9683 | 0.9435 | 0.9104 | 0.8665 | 0.8080 | 0.7251 | 0.6164 | 0.4785 |
| | **NAFSMF** | 0.9713 | 0.9500 | 0.9269 | 0.9011 | 0.8738 | 0.8391 | 0.8000 | 0.7414 | 0.6195 |
| | **DAMF** | 0.9865 | 0.9731 | 0.9554 | 0.9349 | 0.9092 | 0.8804 | 0.8434 | 0.7917 | 0.6959 |
| | **AWMF** | 0.9695 | 0.9620 | 0.9512 | 0.9374 | 0.9179 | 0.8919 | 0.8551 | 0.8020 | 0.7051 |
| | **ARmF** | **0.9883** | **0.9774** | **0.9644** | **0.9491** | **0.9284** | **0.9010** | **0.8633** | **0.8085** | **0.7099** |
| **Aslan** | **BPDF** | 0.9900 | 0.9767 | 0.9559 | 0.9310 | 0.8973 | 0.8506 | 0.7828 | 0.6899 | 0.5169 |
| | **MDBUTMF** | 0.9861 | 0.9224 | 0.7593 | 0.7232 | 0.8294 | 0.9030 | 0.8922 | 0.8011 | 0.4326 |
| | **DBA** | 0.9927 | 0.9839 | 0.9707 | 0.9530 | 0.9253 | 0.8880 | 0.8341 | 0.7627 | 0.6649 |
| | **NAFSMF** | 0.9831 | 0.9678 | 0.9513 | 0.9345 | 0.9158 | 0.8944 | 0.8637 | 0.8230 | 0.7029 |
| | **DAMF** | 0.9930 | 0.9867 | 0.9786 | 0.9685 | 0.9556 | 0.9390 | 0.9161 | 0.8796 | 0.8079 |
| | **AWMF** | 0.9822 | 0.9790 | 0.9741 | 0.9672 | 0.9572 | 0.9430 | 0.9210 | 0.8847 | 0.8163 |
| | **ARmF** | **0.9934** | **0.9885** | **0.9827** | **0.9748** | **0.9637** | **0.9487** | **0.9258** | **0.8889** | **0.8188** |
| **Multimetre** | **BPDF** | 0.9760 | 0.9496 | 0.9193 | 0.8833 | 0.8357 | 0.7745 | 0.6923 | 0.5682 | 0.3638 |
| | **MDBUTMF** | 0.9788 | 0.9226 | 0.7867 | 0.7477 | 0.8135 | 0.8523 | 0.8257 | 0.7527 | 0.4743 |
| | **DBA** | 0.9803 | 0.9604 | 0.9347 | 0.9036 | 0.8642 | 0.8146 | 0.7521 | 0.6711 | 0.5545 |
| | **NAFSMF** | 0.9769 | 0.9547 | 0.9314 | 0.9059 | 0.8768 | 0.8464 | 0.8076 | 0.7587 | 0.6396 |
| | **DAMF** | 0.9835 | 0.9656 | 0.9443 | 0.9204 | 0.8916 | 0.8610 | 0.8247 | 0.7792 | 0.7064 |
| | **AWMF** | 0.9722 | 0.9607 | 0.9449 | 0.9248 | 0.9003 | 0.8709 | 0.8344 | 0.7869 | 0.7151 |
| | **ARmF** | **0.9856** | **0.9711** | **0.9542** | **0.9340** | **0.9092** | **0.8793** | **0.8416** | **0.7924** | **0.7182** |
| **Kalemler 1** | **BPDF** | 0.9824 | 0.9619 | 0.9346 | 0.8940 | 0.8290 | 0.7271 | 0.5752 | 0.3305 | 0.1055 |
| | **MDBUTMF** | 0.9914 | 0.9598 | 0.8734 | 0.8447 | 0.8874 | 0.9022 | 0.8786 | 0.7850 | 0.4233 |
| | **DBA** | 0.9941 | 0.9830 | 0.9648 | 0.9384 | 0.8979 | 0.8365 | 0.7502 | 0.6148 | 0.4546 |
| | **NAFSMF** | 0.9844 | 0.9678 | 0.9497 | 0.9291 | 0.9072 | 0.8806 | 0.8476 | 0.7931 | 0.6717 |
| | **DAMF** | 0.9968 | 0.9903 | 0.9804 | 0.9675 | 0.9516 | 0.9332 | 0.9082 | 0.8666 | 0.7794 |
| | **AWMF** | 0.9862 | 0.9829 | 0.9788 | 0.9722 | 0.9628 | 0.9473 | 0.9232 | 0.8806 | 0.7927 |
| | **ARmF** | **0.9968** | **0.9926** | **0.9875** | **0.9801** | **0.9695** | **0.9536** | **0.9287** | **0.8856** | **0.7973** |
| **Kalemler 2** | **BPDF** | 0.9822 | 0.9625 | 0.9383 | 0.9025 | 0.8520 | 0.7649 | 0.6392 | 0.4102 | 0.1271 |
| | **MDBUTMF** | 0.9877 | 0.9502 | 0.8491 | 0.8182 | 0.8733 | 0.9003 | 0.8777 | 0.7952 | 0.4778 |
| | **DBA** | 0.9934 | 0.9818 | 0.9640 | 0.9385 | 0.9005 | 0.8432 | 0.7645 | 0.6414 | 0.4705 |
| | **NAFSMF** | 0.9850 | 0.9708 | 0.9560 | 0.9378 | 0.9163 | 0.8927 | 0.8576 | 0.8030 | 0.6831 |
| | **DAMF** | 0.9957 | 0.9887 | 0.9784 | 0.9645 | 0.9471 | 0.9280 | 0.9023 | 0.8585 | 0.7705 |
| | **AWMF** | 0.9834 | 0.9802 | 0.9756 | 0.9691 | 0.9580 | 0.9425 | 0.9169 | 0.8721 | 0.7838 |
| | **ARmF** | **0.9954** | **0.9908** | **0.9852** | **0.9774** | **0.9656** | **0.9492** | **0.9228** | **0.8775** | **0.7885** |

Tablo 17
Sütun, plastik, çatı, atkı, vida ve salyangoz görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları

| | Filtreler | %10 | %20 | %30 | %40 | %50 | %60 | %70 | %80 | %90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sütun** | **BPDF** | 0.9861 | 0.9706 | 0.9449 | 0.9138 | 0.8642 | 0.7986 | 0.7014 | 0.5543 | 0.2462 |
| | **MDBUTMF** | 0.9726 | 0.9260 | 0.8096 | 0.7746 | 0.8382 | 0.8718 | 0.8473 | 0.7630 | 0.3974 |
| | **DBA** | 0.9908 | 0.9794 | 0.9628 | 0.9394 | 0.9055 | 0.8565 | 0.7905 | 0.7035 | 0.5833 |
| | **NAFSMF** | 0.9747 | 0.9504 | 0.9268 | 0.9061 | 0.8807 | 0.8523 | 0.8151 | 0.7686 | 0.6498 |
| | **DAMF** | 0.9876 | 0.9787 | 0.9674 | 0.9548 | 0.9381 | 0.9175 | 0.8888 | 0.8441 | 0.7582 |
| | **AWMF** | 0.9804 | 0.9753 | 0.9687 | 0.9607 | 0.9484 | 0.9310 | 0.9031 | 0.8596 | 0.7767 |
| | **ARmF** | **0.9929** | **0.9868** | **0.9791** | **0.9701** | **0.9564** | **0.9381** | **0.9090** | **0.8637** | **0.7794** |
| **Plastik** | **BPDF** | 0.9735 | 0.9443 | 0.9122 | 0.8732 | 0.8278 | 0.7627 | 0.6651 | 0.4914 | 0.1463 |
| | **MDBUTMF** | 0.9747 | 0.9340 | 0.8420 | 0.8049 | 0.8329 | 0.8362 | 0.8018 | 0.7130 | 0.3707 |
| | **DBA** | 0.9774 | 0.9547 | 0.9262 | 0.8936 | 0.8542 | 0.8041 | 0.7391 | 0.6635 | 0.5652 |
| | **NAFSMF** | 0.9785 | 0.9569 | 0.9329 | 0.9079 | 0.8794 | 0.8482 | 0.8104 | 0.7611 | 0.6542 |
| | **DAMF** | 0.9808 | 0.9605 | 0.9367 | 0.9109 | 0.8811 | 0.8467 | 0.8060 | 0.7587 | 0.6995 |
| | **AWMF** | 0.9705 | 0.9571 | 0.9380 | 0.9155 | 0.8884 | 0.8552 | 0.8138 | 0.7660 | 0.7088 |
| | **ARmF** | **0.9832** | **0.9659** | **0.9451** | **0.9223** | **0.8950** | **0.8612** | **0.8186** | **0.7688** | **0.7095** |
| **Çatı** | **BPDF** | 0.9884 | 0.9692 | 0.9426 | 0.9004 | 0.8398 | 0.7580 | 0.6625 | 0.5544 | 0.4146 |
| | **MDBUTMF** | 0.9749 | 0.9108 | 0.7618 | 0.7177 | 0.8079 | 0.8690 | 0.8455 | 0.7538 | 0.4181 |
| | **DBA** | 0.9884 | 0.9768 | 0.9571 | 0.9277 | 0.8844 | 0.8222 | 0.7425 | 0.6504 | 0.5633 |
| | **NAFSMF** | 0.9600 | 0.9307 | 0.9062 | 0.8813 | 0.8542 | 0.8222 | 0.7810 | 0.7197 | 0.6024 |
| | **DAMF** | 0.9896 | 0.9826 | 0.9721 | 0.9583 | 0.9402 | 0.9170 | 0.8877 | 0.8398 | 0.7418 |
| | **AWMF** | 0.9801 | 0.9753 | 0.9706 | 0.9624 | 0.9511 | 0.9311 | 0.9019 | 0.8549 | 0.7572 |
| | **ARmF** | **0.9944** | **0.9888** | **0.9822** | **0.9729** | **0.9600** | **0.9391** | **0.9090** | **0.8612** | **0.7620** |
| **Atkı** | **BPDF** | 0.9816 | 0.9538 | 0.9115 | 0.8519 | 0.7673 | 0.6506 | 0.4974 | 0.3255 | 0.1450 |
| | **MDBUTMF** | 0.9780 | 0.9427 | 0.8752 | 0.8441 | 0.8516 | 0.8381 | 0.7903 | 0.7044 | 0.4862 |
| | **DBA** | 0.9853 | 0.9677 | 0.9401 | 0.9017 | 0.8431 | 0.7568 | 0.6387 | 0.4909 | 0.3294 |
| | **NAFSMF** | 0.9683 | 0.9379 | 0.9030 | 0.8688 | 0.8263 | 0.7815 | 0.7233 | 0.6506 | 0.5226 |
| | **DAMF** | 0.9896 | 0.9779 | 0.9621 | 0.9433 | 0.9173 | 0.8840 | 0.8365 | 0.7644 | 0.6258 |
| | **AWMF** | 0.9725 | 0.9640 | 0.9529 | 0.9396 | 0.9186 | 0.8881 | 0.8422 | 0.7705 | 0.6325 |
| | **ARmF** | **0.9906** | **0.9811** | **0.9685** | **0.9532** | **0.9303** | **0.8981** | **0.8506** | **0.7769** | **0.6357** |
| **Vida** | **BPDF** | 0.9832 | 0.9572 | 0.9187 | 0.8667 | 0.7921 | 0.6877 | 0.5460 | 0.3648 | 0.1357 |
| | **MDBUTMF** | 0.9771 | 0.9429 | 0.8763 | 0.8424 | 0.8468 | 0.8315 | 0.7840 | 0.6966 | 0.4416 |
| | **DBA** | 0.9873 | 0.9693 | 0.9439 | 0.9060 | 0.8520 | 0.7715 | 0.6644 | 0.5246 | 0.3621 |
| | **NAFSMF** | 0.9647 | 0.9313 | 0.8947 | 0.8554 | 0.8144 | 0.7662 | 0.7085 | 0.6334 | 0.5080 |
| | **DAMF** | 0.9899 | 0.9777 | 0.9628 | 0.9443 | 0.9207 | 0.8894 | 0.8450 | 0.7747 | 0.6312 |
| | **AWMF** | 0.9732 | 0.9650 | 0.9553 | 0.9422 | 0.9241 | 0.8961 | 0.8524 | 0.7822 | 0.6383 |
| | **ARmF** | **0.9917** | **0.9824** | **0.9713** | **0.9565** | **0.9362** | **0.9068** | **0.8613** | **0.7892** | **0.6426** |
| **Salyangoz** | **BPDF** | 0.9913 | 0.9786 | 0.9626 | 0.9352 | 0.8967 | 0.8427 | 0.7473 | 0.5672 | 0.2653 |
| | **MDBUTMF** | 0.9832 | 0.9289 | 0.7986 | 0.7652 | 0.8590 | 0.9176 | 0.9096 | 0.8365 | 0.4737 |
| | **DBA** | 0.9940 | 0.9868 | 0.9759 | 0.9598 | 0.9362 | 0.8994 | 0.8473 | 0.7624 | 0.6293 |
| | **NAFSMF** | 0.9860 | 0.9736 | 0.9628 | 0.9502 | 0.9369 | 0.9202 | 0.8978 | 0.8584 | 0.7358 |
| | **DAMF** | 0.9935 | 0.9879 | 0.9815 | 0.9726 | 0.9619 | 0.9486 | 0.9295 | 0.8989 | 0.8341 |
| | **AWMF** | 0.9883 | 0.9856 | 0.9814 | 0.9754 | 0.9674 | 0.9555 | 0.9374 | 0.9078 | 0.8466 |
| | **ARmF** | **0.9957** | **0.9918** | **0.9871** | **0.9805** | **0.9718** | **0.9594** | **0.9408** | **0.9106** | **0.8483** |

Tablo 18
Çorap, şekerleme, domates 1, domates 2, aletler 1 ve aletler 2 görüntüleri için filtrelerin SSIM sonuçları

| | Filtreler | %10 | %20 | %30 | %40 | %50 | %60 | %70 | %80 | %90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Çorap** | **BPDF** | 0.9688 | 0.9308 | 0.8838 | 0.8294 | 0.7623 | 0.6763 | 0.5619 | 0.3923 | 0.1633 |
| | **MDBUTMF** | 0.9690 | 0.9189 | 0.8277 | 0.7808 | 0.7854 | 0.7613 | 0.7076 | 0.6226 | 0.4132 |
| | **DBA** | 0.9728 | 0.9432 | 0.9053 | 0.8590 | 0.8023 | 0.7278 | 0.6361 | 0.5269 | 0.3847 |
| | **NAFSMF** | 0.9674 | 0.9331 | 0.8951 | 0.8545 | 0.8107 | 0.7579 | 0.6987 | 0.6264 | 0.5034 |
| | **DAMF** | 0.9774 | 0.9526 | 0.9232 | 0.8905 | 0.8528 | 0.8041 | 0.7471 | 0.6729 | 0.5537 |
| | **AWMF** | 0.9634 | 0.9444 | 0.9209 | 0.8932 | 0.8601 | 0.8137 | 0.7568 | 0.6810 | 0.5610 |
| | **ARmF** | **0.9815** | **0.9612** | **0.9371** | **0.9090** | **0.8751** | **0.8274** | **0.7686** | **0.6897** | **0.5659** |
| **Şekerleme** | **BPDF** | 0.9895 | 0.9755 | 0.9549 | 0.9239 | 0.8783 | 0.8075 | 0.6966 | 0.4842 | 0.1034 |
| | **MDBUTMF** | 0.9911 | 0.9525 | 0.8604 | 0.8345 | 0.8931 | 0.9231 | 0.9032 | 0.8182 | 0.4401 |
| | **DBA** | 0.9927 | 0.9843 | 0.9707 | 0.9512 | 0.9201 | 0.8729 | 0.8028 | 0.6945 | 0.5457 |
| | **NAFSMF** | 0.9870 | 0.9745 | 0.9617 | 0.9480 | 0.9326 | 0.9126 | 0.8836 | 0.8406 | 0.7198 |
| | **DAMF** | 0.9950 | 0.9891 | 0.9818 | 0.9715 | 0.9599 | 0.9432 | 0.9196 | 0.8817 | 0.8056 |
| | **AWMF** | 0.9865 | 0.9830 | 0.9787 | 0.9720 | 0.9627 | 0.9481 | 0.9252 | 0.8879 | 0.8138 |
| | **ARmF** | **0.9954** | **0.9910** | **0.9857** | **0.9782** | **0.9682** | **0.9528** | **0.9293** | **0.8911** | **0.8161** |
| **Domates 1** | **BPDF** | 0.9924 | 0.9807 | 0.9631 | 0.9376 | 0.9000 | 0.8338 | 0.7264 | 0.5077 | 0.1617 |
| | **MDBUTMF** | 0.9938 | 0.9502 | 0.8264 | 0.8017 | 0.8892 | 0.9411 | 0.9337 | 0.8539 | 0.4486 |
| | **DBA** | 0.9945 | 0.9884 | 0.9787 | 0.9642 | 0.9404 | 0.9040 | 0.8474 | 0.7503 | 0.5836 |
| | **NAFSMF** | 0.9926 | 0.9846 | 0.9786 | 0.9700 | 0.9601 | 0.9480 | 0.9285 | 0.8923 | 0.7698 |
| | **DAMF** | 0.9964 | 0.9918 | 0.9860 | 0.9793 | 0.9701 | 0.9587 | 0.9419 | 0.9162 | 0.8533 |
| | **AWMF** | 0.9923 | 0.9902 | 0.9871 | 0.9825 | 0.9758 | 0.9658 | 0.9499 | 0.9247 | 0.8663 |
| | **ARmF** | **0.9972** | **0.9943** | **0.9907** | **0.9858** | **0.9787** | **0.9685** | **0.9524** | **0.9268** | **0.8679** |
| **Domates 2** | **BPDF** | 0.9951 | 0.9870 | 0.9741 | 0.9554 | 0.9251 | 0.8724 | 0.7878 | 0.6170 | 0.3064 |
| | **MDBUTMF** | 0.9885 | 0.9311 | 0.7664 | 0.7358 | 0.8516 | 0.9382 | 0.9384 | 0.8737 | 0.5117 |
| | **DBA** | 0.9971 | 0.9928 | 0.9856 | 0.9740 | 0.9578 | 0.9232 | 0.8764 | 0.7908 | 0.6475 |
| | **NAFSMF** | 0.9936 | 0.9880 | 0.9826 | 0.9768 | 0.9692 | 0.9583 | 0.9394 | 0.9076 | 0.7862 |
| | **DAMF** | 0.9984 | 0.9957 | 0.9922 | 0.9869 | 0.9802 | 0.9709 | 0.9578 | 0.9353 | 0.8815 |
| | **AWMF** | 0.9942 | 0.9931 | 0.9910 | 0.9879 | 0.9832 | 0.9753 | 0.9630 | 0.9418 | 0.8945 |
| | **ARmF** | **0.9985** | **0.9966** | **0.9943** | **0.9906** | **0.9855** | **0.9775** | **0.9648** | **0.9435** | **0.8959** |
| **Aletler 1** | **BPDF** | 0.9824 | 0.9594 | 0.9296 | 0.8841 | 0.8242 | 0.7361 | 0.6063 | 0.3888 | 0.1408 |
| | **MDBUTMF** | 0.9844 | 0.9522 | 0.8855 | 0.8553 | 0.8745 | 0.8729 | 0.8374 | 0.7473 | 0.4453 |
| | **DBA** | 0.9890 | 0.9732 | 0.9523 | 0.9206 | 0.8772 | 0.8171 | 0.7267 | 0.6035 | 0.4427 |
| | **NAFSMF** | 0.9785 | 0.9564 | 0.9338 | 0.9083 | 0.8788 | 0.8468 | 0.8057 | 0.7419 | 0.6249 |
| | **DAMF** | 0.9921 | 0.9811 | 0.9678 | 0.9502 | 0.9282 | 0.9025 | 0.8676 | 0.8126 | 0.7087 |
| | **AWMF** | 0.9783 | 0.9710 | 0.9625 | 0.9513 | 0.9348 | 0.9119 | 0.8776 | 0.8223 | 0.7185 |
| | **ARmF** | **0.9926** | **0.9842** | **0.9747** | **0.9623** | **0.9448** | **0.9207** | **0.8851** | **0.8288** | **0.7232** |
| **Aletler 2** | **BPDF** | 0.9844 | 0.9642 | 0.9385 | 0.9035 | 0.8585 | 0.7936 | 0.6936 | 0.5227 | 0.2524 |
| | **MDBUTMF** | 0.9812 | 0.9226 | 0.7653 | 0.7311 | 0.8334 | 0.8973 | 0.8871 | 0.8232 | 0.5301 |
| | **DBA** | 0.9875 | 0.9754 | 0.9591 | 0.9357 | 0.9047 | 0.8597 | 0.7963 | 0.7041 | 0.5602 |
| | **NAFSMF** | 0.9835 | 0.9695 | 0.9558 | 0.9403 | 0.9229 | 0.9026 | 0.8776 | 0.8385 | 0.7200 |
| | **DAMF** | 0.9884 | 0.9776 | 0.9652 | 0.9501 | 0.9316 | 0.9104 | 0.8848 | 0.8502 | 0.7902 |
| | **AWMF** | 0.9792 | 0.9733 | 0.9641 | 0.9517 | 0.9359 | 0.9158 | 0.8906 | 0.8560 | 0.7986 |
| | **ARmF** | **0.9898** | **0.9806** | **0.9703** | **0.9573** | **0.9410** | **0.9207** | **0.8947** | **0.8588** | **0.8002** |

Tablo 19
Ahşap oyunu görüntüsü için filtrelerin SSIM sonuçları

| | Filtreler | %10 | %20 | %30 | %40 | %50 | %60 | %70 | %80 | %90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ahşap oyunu** | **BPDF** | 0.9915 | 0.9793 | 0.9653 | 0.9445 | 0.9186 | 0.8725 | 0.7968 | 0.6439 | 0.3410 |
| | **MDBUTMF** | 0.9767 | 0.9028 | 0.6915 | 0.6573 | 0.8076 | 0.9188 | 0.9259 | 0.8290 | 0.3816 |
| | **DBA** | 0.9953 | 0.9911 | 0.9839 | 0.9728 | 0.9552 | 0.9303 | 0.8912 | 0.8290 | 0.7366 |
| | **NAFSMF** | 0.9757 | 0.9624 | 0.9545 | 0.9476 | 0.9413 | 0.9328 | 0.9172 | 0.8904 | 0.7741 |
| | **DAMF** | 0.9931 | 0.9877 | 0.9824 | 0.9762 | 0.9680 | 0.9585 | 0.9442 | 0.9225 | 0.8739 |
| | **AWMF** | 0.9869 | 0.9859 | 0.9834 | 0.9795 | 0.9739 | 0.9661 | 0.9525 | 0.9324 | 0.8915 |
| | **ARmF** | **0.9943** | **0.9916** | **0.9881** | **0.9835** | **0.9772** | **0.9689** | **0.9548** | **0.9344** | **0.8926** |

Bu problem için, $\mu_t^{ij}$ notasyonu $i$'inci filtre ve $j$'inci gürültü yoğunluğu için $t$'inci görüntüden elde edilen ve Tablo 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 ve 19'da verilen SSIM sonuçlarını göstermektedir. Burada, $\nu_t^{ij} = 1 - \mu_t^{ij}$ ve $\pi_t^{ij} = 0$, olduğundan $i \in I_7$, $j \in I_9$ ve $t \in I_{40}$ olmak üzere, $[b_{ij}]$ $d$-matrisi için,

$$\alpha_{ij}^b := \left[ \frac{\min\limits_t \mu_t^{ij}}{\max\limits_t \mu_t^{ij} + \max\limits_t \{1 - \mu_t^{ij}\}}, \frac{\max\limits_t \mu_t^{ij}}{\max\limits_t \mu_t^{ij} + \max\limits_t \{1 - \mu_t^{ij}\}} \right]$$

ve

$$\beta_{ij}^b := \left[ \frac{\min\limits_t \{1 - \mu_t^{ij}\}}{\max\limits_t \mu_t^{ij} + \max\limits_t \{1 - \mu_t^{ij}\}}, \frac{\max\limits_t \{1 - \mu_t^{ij}\}}{\max\limits_t \mu_t^{ij} + \max\limits_t \{1 - \mu_t^{ij}\}} \right]$$

biçimindedir. Örneğin,

$$\begin{aligned}(\mu_t^{11}) = \quad & (0.9815, 0.9931, 0.9935, 0.9873, 0.9953, 0.9901, 0.9821, 0.9814, 0.9894, 0.9866,\\ & 0.9970, 0.9869, 0.9782, 0.9937, 0.9956, 0.9840, 0.9841, 0.9751, 0.9788, 0.9874,\\ & 0.9776, 0.9845, 0.9782, 0.9900, 0.9760, 0.9824, 0.9822, 0.9861, 0.9735, 0.9884,\\ & 0.9816, 0.9832, 0.9913, 0.9688, 0.9895, 0.9924, 0.9951, 0.9824, 0.9844, 0.9915)\end{aligned}$$

sıralı 40'lısı %10 gürültü yoğunluğunda kırk görüntü için BPDF'nin SSIM sonuçlarını göstermektedir. O halde,

$$\begin{aligned}\alpha_{11}^b &= \left[ \frac{\min\limits_t \mu_t^{11}}{\max\limits_t \mu_t^{11} + \max\limits_t \{1 - \mu_t^{11}\}}, \frac{\max\limits_t \mu_t^{11}}{\max\limits_t \mu_t^{11} + \max\limits_t \{1 - \mu_t^{11}\}} \right]\\ &= \left[ \frac{0.9688}{0.9970 + 0.0312}, \frac{0.9970}{0.9970 + 0.0312} \right]\\ &= [0.9422, 0.9696]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\beta_{11}^{a} &= \left[\frac{\min\limits_{t}\{1-\mu_t^{11}\}}{\max\limits_{t}\mu_t^{11}+\max\limits_{t}\{1-\mu_t^{11}\}}, \frac{\max\limits_{t}\{1-\mu_t^{11}\}}{\max\limits_{t}\mu_t^{11}+\max\limits_{t}\{1-\mu_t^{11}\}}\right] \\
&= \left[\frac{0.003}{0.9970+0.0312}, \frac{0.0312}{0.9970+0.0312}\right] \\
&= [0.0029, 0.0304]
\end{aligned}$$

olduğundan $b_{11} = \frac{[0.9422,0.9696]}{[0.0029,0.0304]}$ olarak elde edilir. Burada, $[0.9422, 0.9696]$ değeri $\%10$ gürültü yoğunluğunda BPDF'nin gürültü gidermede başarılı olma durumunun yaklaşık olarak $\%94$ ile $\%96$ arasında değiştiğini göstermektedir. Ayrıca, $[0.0029, 0.0304]$ değeri $\%10$ gürültü yoğunluğunda BPDF'nin gürültü gidermede başarısız olma durumunun da yaklaşık olarak $\%0$ ile $\%3$ arasında değiştiğini ifade etmektedir. Benzer şekilde, $[b_{ij}]$ $d$-matrisinin sıfır indisli satırları hariç diğer satırları elde edilir.

Ayrıca, bu problemde, filtrelerin gürültü giderme performanslarının, gürültülü piksellerin bozulmamış piksellerden daha fazla olduğu yüksek gürültü yoğunluklarında daha önemli olduğunu varsayılmaktadır. Dolayısıyla, yüksek gürültü yoğunluklarındaki performans temelli başarı diğer yoğunluklardan daha önemli olacaktır. Örneğin,

$$[b_{01}] = \begin{bmatrix} [0,0.01] & [0,0.05] & [0,0.1] & [0.05,0.35] & [0.2,0.45] & [0.25,0.5] & [0.8,0.85] & [0.85,0.9] & [0.9,0.95] \\ [0.9,0.95] & [0.85,0.9] & [0.8,0.85] & [0.25,0.5] & [0.2,0.45] & [0.05,0.35] & [0,0.1] & [0,0.05] & [0,0.01] \end{bmatrix}$$

olsun. Böylece, Tablo 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 ve 19'daki değerleri modelleyen aşağıdaki $[b_{ij}]$ $d$-matrisi elde edildi.

$$[b_{ij}] = \left[\begin{array}{ccccc}
\frac{[0,0.01]}{[0.9,0.95]} & \frac{[0,0.05]}{[0.85,0.9]} & \frac{[0,0.1]}{[0.8,0.85]} & \frac{[0.05,0.35]}{[0.25,0.5]} & \frac{[0.2,0.45]}{[0.2,0.45]} \\
\frac{[0.9422,0.9696]}{[0.0029,0.0304]} & \frac{[0.8771,0.9348]}{[0.0074,0.0652]} & \frac{[0.8040,0.8943]}{[0.0154,0.1057]} & \frac{[0.7263,0.8506]}{[0.0250,0.1494]} & \frac{[0.6424,0.7997]}{[0.0430,0.2003]} \\
\frac{[0.9382,0.9677]}{[0.0027,0.0323]} & \frac{[0.8538,0.9081]}{[0.0376,0.0919]} & \frac{[0.5711,0.7452]}{[0.0806,0.2548]} & \frac{[0.5393,0.7188]}{[0.1017,0.2812]} & \frac{[0.7090,0.8063]}{[0.0965,0.1937]} \\
\frac{[0.9488,0.9735]}{[0.0019,0.0265]} & \frac{[0.8965,0.9460]}{[0.0044,0.0540]} & \frac{[0.8340,0.9127]}{[0.0085,0.0873]} & \frac{[0.7636,0.8747]}{[0.0143,0.1253]} & \frac{[0.6865,0.8309]}{[0.0248,0.1691]} \\
\frac{[0.9272,0.9613]}{[0.0045,0.0387]} & \frac{[0.8780,0.9346]}{[0.0087,0.0654]} & \frac{[0.8192,0.9036]}{[0.0121,0.0964]} & \frac{[0.7564,0.8712]}{[0.0140,0.1288]} & \frac{[0.6936,0.8381]}{[0.0174,0.1619]} \\
\frac{[0.9569,0.9779]}{[0.0011,0.0221]} & \frac{[0.9120,0.9546]}{[0.0027,0.0454]} & \frac{[0.8616,0.9284]}{[0.0048,0.0716]} & \frac{[0.8087,0.9006]}{[0.0075,0.0994]} & \frac{[0.7515,0.8703]}{[0.0108,0.1297]} \\
\frac{[0.9336,0.9645]}{[0.0046,0.0355]} & \frac{[0.8990,0.9471]}{[0.0048,0.0529]} & \frac{[0.8582,0.9262]}{[0.0057,0.0738]} & \frac{[0.8130,0.9028]}{[0.0073,0.0972]} & \frac{[0.7620,0.8761]}{[0.0099,0.1239]} \\
\frac{[0.9648,0.9818]}{[0.0012,0.0182]} & \frac{[0.9276,0.9626]}{[0.0025,0.0374]} & \frac{[0.8852,0.9406]}{[0.0040,0.0594]} & \frac{[0.8381,0.9161]}{[0.0059,0.0839]} & \frac{[0.7848,0.8880]}{[0.0088,0.1120]}
\end{array}\right.$$

$$
\left.\begin{matrix}
[0.25,0.5] & [0.8,0.85] & [0.85,0.9] & [0.9,0.95] \\
{[0.05,0.35]} & [0,0.1] & [0,0.05] & [0,0.01] \\
{[0.5140,0.7240]} & [0.3632,0.6306] & [0.2218,0.5204] & [0.0602,0.3613] \\
{[0.0660,0.2760]} & [0.1019,0.3694] & [0.1810,0.4796] & [0.3377,0.6387] \\
{[0.6329,0.8015]} & [0.5613,0.7681] & [0.4893,0.7034] & [0.2977,0.4583] \\
{[0.0299,0.1985]} & [0.0250,0.2319] & [0.0826,0.2966] & [0.3811,0.5417] \\
{[0.5934,0.7781]} & [0.4946,0.7170] & [0.3514,0.6284] & [0.2074,0.5295] \\
{[0.0373,0.2219]} & [0.0606,0.2830] & [0.0947,0.3716] & [0.1484,0.4705] \\
{[0.6232,0.8009]} & [0.5533,0.7614] & [0.4783,0.7147] & [0.3789,0.6262] \\
{[0.0214,0.1991]} & [0.0305,0.2386] & [0.0489,0.2853] & [0.1264,0.3738] \\
{[0.6823,0.8338]} & [0.6080,0.7942] & [0.5217,0.7463] & [0.4017,0.6762] \\
{[0.0147,0.1662]} & [0.0197,0.2058] & [0.0290,0.2537] & [0.0492,0.3238] \\
{[0.6951,0.8408]} & [0.6199,0.8008] & [0.5305,0.7515] & [0.4071,0.6814] \\
{[0.0134,0.1592]} & [0.0182,0.1992] & [0.0274,0.2485] & [0.0443,0.3186] \\
{[0.7145,0.8510]} & [0.6351,0.8088] & [0.5406,0.7568] & [0.4120,0.6840] \\
{[0.0125,0.1490]} & [0.0175,0.1912] & [0.0269,0.2432] & [0.0440,0.3160]
\end{matrix}\right]
$$

Son olarak, yapılandırılan esnek karar verme metodu $[b_{ij}]$'ye uygulandı. Böylece, $\begin{bmatrix}\alpha_{i1}\\ \beta_{i1}\end{bmatrix}$ sütun matrisi, skor matrisi ve karar kümesi aşağıdaki gibi elde edildi.

$$
\begin{bmatrix}\alpha_{i1}\\ \beta_{i1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
[0.1837,0.5585] & [0.3244,0.6369] & [0.2678,0.6434] & [0.3383,0.6921] & [0.3673,0.7252] & [0.3733,0.7299] & [0.3813,0.7369] \\
{[0.0087,0.1125]} & [0.0323,0.1490] & [0.0050,0.0924] & [0.0065,0.0948] & [0.0026,0.0723] & [0.0038,0.0755] & [0.0023,0.0623]
\end{bmatrix}^T
$$

$$
\begin{aligned}
[s_{i1}] = \; & [[0.0712, 0.5497] \; [0.1754, 0.6047] \; [0.1753, 0.6384] \; [0.2436, 0.6856] \\
& [0.2950, 0.7225] \; [0.2979, 0.7261] \; [0.3190, 0.7347]]^T
\end{aligned}
$$

ve

$$
\Big\{ {}^{[0.1768,0.7705]}\text{BPDF}, {}^{[0.3060,0.8387]}\text{MDBUTMF}, {}^{[0.3059,0.8805]}\text{DBA}, {}^{[0.3906,0.9392]}\text{NAFSMF}, {}^{[0.4544,0.9849]}\text{DAMF}, {}^{[0.4580,0.9894]}\text{AWMF}, {}^{[0.4842,1]}\text{ARmF} \Big\}
$$

Sonuç olarak,

$$
\text{BPDF} \prec \text{MDBUTMF} \prec \text{DBA} \prec \text{NAFSMF} \prec \text{DAMF} \prec \text{AWMF} \prec \text{ARmF}
$$

sıralaması geçerlidir. Dolayısıyla, skor değerleri ARmF'nin diğer filtrelerden daha iyi performans gösterdiğini ifade etmektedir.

# BÖLÜM 7
# SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez çalışmasının kuramsal bölümünde, hem parametreleri hem de alternatifleri *ivif*-değerler içeren problemlerin matematiksel olarak modellenebilmesi için $d$-küme kavramı tanıtıldı. Daha sonra $d$-kümelerin modelleme becerisini geliştirmek için, bu kavramın matris temsili olan $d$-matris kavramı çalışıldı. Böylece $d$-matris kavramı yüksek sayıda veri içeren problemlerdeki verileri bilgisayar ortamına aktarıp işlemeye imkan sağladı.

Tez çalışmasının uygulama bölümünün birinci aşamasında, $d$-kümeler yoluyla bir esnek karar verme metodu önerildi ve ikinci aşamasında bu metot $d$-matrisler uzayına yapılandırıldı. Ayrıca, bu metotlar çoklu bulanık değerler içeren karar verme problemlerine uygulandı. İlk olarak, önerilen esnek karar verme metodu gürültü kaldırmada kullanılan yedi filtrenin dört görüntü için SSIM sonuçları kullanılarak inşa edilen bir $d$-kümeye uygulandı. İkinci olarak, yapılandırılan metot iki farklı veri tabanında yer alan yirmi ve kırk görüntü için bu filtrelerin SSIM sonuçları kullanılarak inşa edilen iki $d$-matrise uygulandı. Bu üç uygulama sonucunda filtrelerin aynı performans sıralaması elde edildi. Dolayısıyla bu sonuçlar, metotların ileri belirsizlik içeren problemlere başarılı bir şekilde uygulandığını gösterdi.

Gelecek çalışmalarda, $d$-matrislerin ve/veya/vedeğil/veyadeğil-çarpımları ve bağıl-birleşim/kesişim/fark işlemleri kullanılarak, grup karar vermeye dayalı etkili esnek karar verme metotları geliştirilebilir. Böylece, tez çalışmasında yapılandırılan metot ile aynı yapı ($d$-matris) aracılığıyla inşa edilen esnek karar verme metotlarını karşılaştırmak mümkün olacaktır. Bu sayede, metotların karar verme performansları daha tutarlı bir şekilde değerlendirilecektir. Ayrıca, çoklu bulanık veya çoklu sezgisel bulanık değerlere sahip alternatiflerin ve parametrelerin *ivif*-değerlerini elde etmek için farklı üye olma/üye olmama fonksiyonları tanımlanabilir ve tez çalışmasında elde edilen sonuçlarla karşılaştırılabilir. Dahası, $d$-küme veya $d$-matris kavramlarını kullanarak benzerlik ve uzaklık ölçümü gibi çeşitli konular ve cebir ve topoloji gibi çeşitli alanlar üzerine teorik ve uygulamalı çalışmalar yürütmek çalışılmaya değerdir.

# KAYNAKLAR


Alkhazaleh, S., Salleh, A. R. ve Hassan, N. (2011). Fuzzy parameterized interval-valued fuzzy soft set. *Applied Mathematical Sciences*, *5*(67), 3335–3346.

Arslan, B. (2019). *Sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek matrisler* (Yüksek lisans tezi). Ulusal Tez Merkezi veri tabanından erişildi (Tez No. 596908).

Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, *20*(1), 87–96. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3

Atanassov, K. T. (1994). Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, *64*(2), 159–174. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)90331-X

Atanassov, K. T. (2020). *Interval-valued intuitionistic fuzzy sets.* Springer: Studies in Fuzziness and Soft Computing. Erişim adresi: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-32090-4

Atanassov, K. T. ve Gargov, G. (1989). Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, *31*(3), 343–349. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/0165-0114(89)90205-4

Atanassov, K. T., Marinov, P. ve Atanassova, V. (2019). Intercriteria analysis with interval-valued intuitionistic fuzzy evaluations. *International Conference on Flexible Query Answering Systems*, 329–338. Erişim adresi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-27629-4_30

Atmaca, S. (2017). Relationship between fuzzy soft topological spaces and $(X, \tau_e)$ parameter spaces. *Cumhuriyet Science Journal*, *38*(4), 77–85. Erişim adresi: https://doi.org/10.17776/csj.340541

Aydın, T. ve Enginoğlu, S. (2019). A configuration of five of the soft decision-making methods via fuzzy parameterized fuzzy soft matrices and their application to a performance-based value assignment problem. M. Kılıç, K. Özkan, M. Karaboyacı, K. Taşdelen, H. Kandemir ve A. Beram (Ed.), *International conferences on science and technology; natural science and technology* (s. 56–67) içinde. Prizren, Kosovo.

Aydın, T. ve Enginoğlu, S. (2020). Interval-valued intuitionistic fuzzy parameterized interval-valued intuitionistic fuzzy soft sets and their application in decision-making. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 1–18. Erişim adresi: https://doi.org/10.1007/s12652-020-02227-0

Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S. (2010). Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications. *Turkish Journal of Fuzzy Systems*, *1*(1), 21–35.

Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S. (2011). FP-soft set theory and its applications. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, *2*(2), 219–226. Erişim adresi: http://www.afmi.or.kr/papers/2011/Vol-02_No-02/AFMI-2-2(219-226)-J-110329R1.pdf

Çağman, N. ve Enginoğlu, S. (2010a). Soft matrix theory and its decision making. *Computers and Mathematics with Applications*, *59*(10), 3308–3314. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.03.015

Çağman, N. ve Enginoğlu, S. (2010b). Soft set theory and *uni-int* decision making. *European Journal of Operational Research*, *207*(2), 848–855. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.05.004

Çağman, N. ve Enginoğlu, S. (2012). Fuzzy soft matrix theory and its application in decision making. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, *9*(1), 109–119. Erişim adresi: http://ijfs.usb.ac.ir/article_229.html

Çağman, N., Enginoğlu, S. ve Çıtak, F. (2011). Fuzzy soft set theory and its applications. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, *8*(3), 137–147. Erişim adresi: http://ijfs.usb.ac.ir/article_292.html

Çıtak, F. ve Çağman, N. (2015). Soft int-rings and its algebraic applications. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, *28*(3), 1225–1233. Erişim adresi: https://doi.org/10.3233/IFS-141406

Çıtak, F. ve Çağman, N. (2017). Soft k-int-ideals of semirings and its algebraic structures. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, *13*(4), 531–538. Erişim adresi: https://doi.org/10.30948/afmi.2017.13.4.531

Deli, İ. ve Çağman, N. (2015). Intuitionistic fuzzy parameterized soft set theory and its decision making. *Applied Soft Computing*, *28*, 109–113. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/j.asoc.2014.11.053

Deli, İ. ve Karataş, S. (2016). Interval valued intuitionistic fuzzy parameterized soft set theory and its decision making. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, *30*(4), 2073–2082. Erişim adresi: https://doi.org/10.3233/IFS-151920

Enginoğlu, S. ve Arslan, B. (2020). Intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft matrices and their application in decision-making. *Computational and Applied Mathematics*, *39*(4), 1–20. Erişim adresi: https://doi.org/10.1007/s40314-020-01325-1

Enginoğlu, S., Ay, M., Çağman, N. ve Tolun, V. (2019). Classification of the monolithic columns produced in troad and mysia region ancient granite quarries in northwestern anatolia via soft decision-making. *Bilge International Journal of Science and Technology Research*, *3*(Special Issue), 21–34. Erişim adresi: https://doi.org/10.30516/

bilgesci.646126

Enginoğlu, S. ve Çağman, N. (2020). Fuzzy parameterized fuzzy soft matrices and their application in decision-making. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, *10*(4), 1105–1115. Erişim adresi: http://jaem.isikun.edu.tr/web/images/articles/vol.10.no.4/25.pdf

Enginoğlu, S., Çağman, N., Karataş, S. ve Aydın, T. (2015). On soft topology. *El-Cezerî Journal of Science and Engineering*, *2*(3), 23–38. Erişim adresi: https://doi.org/10.31202/ecjse.67135

Enginoğlu, S., Erkan, U. ve Memiş, S. (2019). Pixel similarity-based adaptive Riesz mean filter for salt-and-pepper noise removal. *Multimedia Tools and Applications*, *78*, 35401–35418. Erişim adresi: https://doi.org/10.1007/s11042-019-08110-1

Enginoğlu, S. ve Memiş, S. (2018). A configuration of some soft decision-making algorithms via *fpfs*-matrices. *Cumhuriyet Science Journal*, *39*(4), 871–881. Erişim adresi: https://doi.org/10.17776/csj.409915

Enginoğlu, S., Memiş, S. ve Arslan, B. (2018). Comment (2) on soft set theory and uni-int decision-making [European Journal of Operational Research, (2010) 207, 848–855]. *Journal of New Theory*(25), 84–102. Erişim adresi: https://dergipark.org.tr/download/article-file/594503

Enginoğlu, S. ve Öngel, T. (2020). Configurations of several soft decision-making methods to operate in fuzzy parameterized fuzzy soft matrices space. *Eskişehir Technical University Journal of Science and Technology A-Applied Sciences and Engineering*, *21*(1), 58–71. Erişim adresi: https://doi.org/10.18038/estubtda.562578

Erkan, U. ve Gökrem, L. (2018). A new method based on pixel density in salt and pepper noise removal. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, *26*(1), 162–171. Erişim adresi: https://doi.org/10.3906/elk-1705-256

Erkan, U., Gökrem, L. ve Enginoğlu, S. (2018). Different applied median filter in salt and pepper noise. *Computers and Electrical Engineering*, *70*, 789–798. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/j.compeleceng.2018.01.019

Esakkirajan, S., Veerakumar, T., Subramanyam, A. N. ve PremChand, C. H. (2011). Removal of high density salt and pepper noise through modified decision based unsymmetric trimmed median filter. *IEEE Signal Processing Letters*, *18*(5), 287–290. Erişim adresi: https://doi.org/10.1109/LSP.2011.2122333

Gorzałczany, M. B. (1987). A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, *21*(1), 1–17. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90148-5

Hao, F., Pei, Z., Park, D. S., Phonexay, V. ve Seo, H. S. (2018). Mobile cloud services recommendation: A soft set-based approach. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, *9*(4), 1235–1243. Erişim adresi: https://doi.org/10.1007/s12652-017-0572-7

Hemavathi, P., Muralikrishna, P. ve Palanivel, K. (2018). On interval valued intuitionistic fuzzy $\beta$-subalgebras. *Afrika Matematika*, *29*(1–2), 249–262. Erişim adresi: https://doi.org/10.1007/s13370-017-0539-z

Huang, B., Zhuang, Y. L. ve Li, H. X. (2013). Information granulation and uncertainty measures in interval-valued intuitionistic fuzzy information systems. *European Journal of Operational Research*, *231*(1), 162–170. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.05.006

Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Liu, H. ve Tang, J. (2010). Interval-valued intuitionistic fuzzy soft sets and their properties. *Computers and Mathematics with Applications*, *60*(3), 906–918. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.05.036

Joshi, R. (2020). A new multi-criteria decision-making method based on intuitionistic fuzzy information and its application to fault detection in a machine. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, *11*(2), 739–753. Erişim adresi: https://doi.org/10.1007/s12652-019-01322-1

Kamacı, H. (2019). Interval-valued fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets and their applications. *Cumhuriyet Science Journal*, *40*(2), 317–331. Erişim adresi: http://dx.doi.org/10.17776/csj.524802

Karaaslan, F. (2016). Intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets with applications in decision making. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, *11*(4), 607–619. Erişim adresi: http://www.afmi.or.kr/papers/2016/Vol-11_No-04/PDF/AFMI-11-4(607-619)-H-150813-1R1.pdf

Kim, T., Sotirova, E., Shannon, A., Atanassova, V., Atanassov, K. T. ve Jang, L. C. (2018). Interval valued intuitionistic fuzzy evaluations for analysis of a student's knowledge in university e-learning courses. *International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, *18*(3), 190–195. Erişim adresi: http://doi.org/10.5391/IJFIS.2018.18.3.190

Liu, Y. ve Jiang, W. (2020). A new distance measure of interval-valued intuitionistic fuzzy sets and its application in decision making. *Soft Computing*, *24*(9), 6987–7003. Erişim adresi: https://doi.org/10.1007/s00500-019-04332-5

Maji, P. K., Biswas, R. ve Roy, A. R. (2001). Fuzzy soft sets. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, *9*(3), 589–602.

Maji, P. K., Biswas, R. ve Roy, A. R. (2003). Soft set theory. *Computers and Mathematics* *with Applications*, *45*(4–5), 555–562. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/S0898-1221(03)00016-6

Maji, P. K., Roy, A. R. ve Biswas, R. (2002). An application of soft sets in a decision making problem. *Computers and Mathematics with Applications*, *44*(8–9), 1077–1083. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/S0898-1221(02)00216-X

Memiş, S., Enginoğlu, S. ve Erkan, U. (2019). A data classification method in machine learning based on normalised hamming pseudo-similarity of fuzzy parameterized fuzzy soft matrices. *Bilge International Journal of Science and Technology Research*, *3*(Special Issue), 1–8. Erişim adresi: https://doi.org/10.30516/bilgesci.643821

Min, W. K. (2008). Interval-valued intuitionistic fuzzy soft sets. *Journal of The Korean Institute of Intelligent Systems*, *18*(3), 316–322. Erişim adresi: https://doi.org/10.5391/JKIIS.2008.18.3.316

Molodtsov, D. (1999). Soft set theory-first results. *Computers and Mathematics with Applications*, *37*(4–5), 19–31. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/S0898-1221(99)00056-5

Park, C. K. (2016). Interval-valued intuitionistic gradation of openness. *Korean Journal of Mathematics*, *24*(1), 27–40. Erişim adresi: http://dx.doi.org/10.11568/kjm.2016.24.1.27

Park, C. K. (2017). $([r,s],[t,u])$-interval-valued intuitionistic fuzzy generalized precontinuous mappings. *Korean Journal of Mathematics*, *25*(1), 1–18. Erişim adresi: https://doi.org/10.11568/kjm.2017.25.1.1

Pattnaik, A., Agarwal, S. ve Chand, S. (2012). A new and efficient method for removal of high density salt and pepper noise through cascade decision based filtering algorithm. *Procedia Technology*, *6*, 108–117. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/j.protcy.2012.10.014

Priyadharsini, J. ve Balasubramaniam, P. (2019). Multi-criteria decision making method based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *The Journal of Analysis*, *27*(1), 259–276. Erişim adresi: https://doi.org/10.1007/s41478-018-0122-5

Razak, S. A. ve Mohamad, D. (2013). A decision making method using fuzzy soft sets. *Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences*, *9*(2), 99–104. Erişim adresi: https://doi.org/10.11113/mjfas.v9n2.91

Riaz, M. ve Hashmi, M. R. (2017). Fuzzy parameterized fuzzy soft topology with applications. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, *13*(5), 593–613. Erişim adresi: https://doi.org/10.30948/afmi.2017.13.5.593

Riaz, M., Hashmi, M. R. ve Farooq, A. (2018). Fuzzy parameterized fuzzy soft metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis*, *9*(2), 25–36. Erişim adresi: http://www.ilirias.com/jma/repository/docs/JMA9-2-3.pdf

Selvachandran, G., John, S. J. ve Salleh, A. R. (2017). Decision making based on the aggregation operator and the intuitionistic fuzzy reduction method of intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets. *Journal of Telecommunication, Electronic and Computer Engineering*, *9*(1-3), 123–127. Erişim adresi: http://journal.utem.edu.my/index.php/jtec/article/view/1756

Senapati, T. ve Shum, K. P. (2019). Atanassov's interval-valued intuitionistic fuzzy set theory applied in KU-subalgebras. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, *11*(2), 17 pages. Erişim adresi: https://doi.org/10.1142/S179383091950023X

Şenel, G. (2016). A new approach to hausdorff space theory via the soft sets. *Mathematical Problems in Engineering*, *2016*, Article ID 2196743, 6 pages. Erişim adresi: https://doi.org/10.1155/2016/2196743

Şenel, G. (2018). Analyzing the locus of soft spheres: Illustrative cases and drawings. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, *11*(4), 946–957. Erişim adresi: https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v11i4.3321

Sezgin, A. (2016). A new approach to semigroup theory I: Soft union semigroups, ideals and bi-ideals. *Algebra Letters*, *2016*(3), 1–46. Erişim adresi: http://scik.org/index.php/abl/article/view/2989

Sezgin, A., Çağman, N. ve Çıtak, F. (2019). $\alpha$-inclusions applied to group theory via soft set and logic. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, *68*(1), 334–352. Erişim adresi: https://doi.org/10.31801/cfsuasmas.420457

Sulukan, E., Çağman, N. ve Aydın, T. (2019). Fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets and their application to a performance-based value assignment problem. *Journal of New Theory*(29), 79–88. Erişim adresi: https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/906764

Tan, C. (2011). A multi-criteria interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making with Choquet integral-based TOPSIS. *Expert Systems with Applications*, *38*(4), 3023–3033. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.08.092

Tang, Z., Yang, Z., Liu, K. ve Pei, Z. (2016). A new adaptive weighted mean filter for removing high density impulse noise. *Eighth international conference on digital image processing (ICDIP 2016)* (Cilt. 10033, s. 1003353/1–5) içinde. Erişim adresi: https://doi.org/10.1117/12.2243838

Toh, K. K. V. ve Isa, N. A. M. (2010). Noise adaptive fuzzy switching median filter for salt-and-pepper noise reduction. *IEEE Signal Processing Letters*, *17*(3), 281–284. Erişim adresi: https://doi.org/10.1109/LSP.2009.2038769

Ullah, A., Karaaslan, F. ve Ahmad, I. (2018). Soft uni-Abel-Grassmann's groups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, *11*(2), 517–536. Erişim adresi: https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v11i2.3228

Wang, Z., Bovik, A. C., Sheikh, H. R. ve Simoncelli, E. P. (2004). Image quality assessment: From error visibility to structural similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, *13*(4), 600–612. Erişim adresi: https://doi.org/10.1109/TIP.2003.819861

Xu, Z. ve Yager, R. R. (2006). Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets. *International Journal of General Systems*, *35*(4), 417–433. Erişim adresi: https://doi.org/10.1080/03081070600574353

Xu, Z. S. (2007). Methods for aggregating interval-valued intuitionistic fuzzy information and their application to decision making. *Control and Decision*, *22*(2), 215–219.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, *8*(3), 338–353. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. *Information Sciences*, *8*(3), 199–249. Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/0020-0255(75)90036-5

Zorlutuna, İ. ve Atmaca, S. (2016). Fuzzy parametrized fuzzy soft topology. *New Trends in Mathematical Sciences*, *4*(1), 142–152. Erişim adresi: https://doi.org/10.20852/ntmsci.2016115658

**ÖZGEÇMİŞ**

**KİŞİSEL BİLGİLER**

| | | |
|---|---|---|
| Adı Soyadı | : | Tuğçe AYDIN |
| Doğum Yeri | : | Çatalca |
| Doğum Tarihi | : | 24.08.1990 |

**EĞİTİM DURUMU**

| | | |
|---|---|---|
| Lisans Öğrenimi | : | Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2013 |
| Yüksek Lisans Öğrenimi | : | Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2016 |
| Doktora Öğrenimi | : | Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2020 |
| Bildiği Yabancı Diller | : | İngilizce |

**BİLİMSEL FAALİYETLERİ**

**a) Yayınlar**

1) SCI / SCI-Expanded

Aydın, T. ve Enginoğlu, S. (2020). Interval-valued intuitionistic fuzzy parameterized interval-valued intuitionistic fuzzy soft sets and their application in decision-making. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 1-18. Erişim adresi: https://doi.org/10.1007/s12652-020-02227-0

2) Diğer

Sulukan, E., Çağman, N. ve Aydın, T. (2019). Fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets and their application to a performance-based value assignment problem. *Journal of New Theory*, (29), 79-88. Erişim adresi: https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/906764

Enginoğlu, S., Çağman, N., Karataş, S. ve Aydın, T. (2015). On soft topology. *El-Cezerî Journal of Science and Engineering*, 2(3), 23-38. Erişim adresi: https://doi.org/10.31202/ecjse.67135

**b) Bildiriler**

1) Uluslararası

Aydın, T. ve Enginoğlu, S. (2020). Configurations of SDM methods proposed between 1999 and 2012: A follow-up study. K. Yıldırım, (Ed.), *International Conference on Mathematics: "An Istanbul Meeting for World Mathematicians"*, Istanbul, October 27-30, pp.192-211.

Aydın, T. ve Enginoğlu, S. (2019). A configuration of five of the soft decision-making methods via fuzzy parameterized fuzzy soft matrices and their application to a performance-based value assignment problem. M. Kılıç, K. Özkan, M. Karaboyacı, K. Taşdelen, H. Kandemir ve A. Beram, (Ed.), *International Conferences on Science and Technology; Natural Science and Technology*, Prizren, Kosovo, August 26-30, pp.56-67.

Aydın, T. ve Enginoğlu, S. (2019). A new concept for mathematical modelling of problems with further uncertainty. M. Kılıç, K. Özkan, M. Karaboyacı, K. Taşdelen, H. Kandemir ve A. Beram, (Ed.), *International Conferences on Science and Technology; Natural Science and Technology*, Prizren, Kosovo, August 26-30, pp.16-16.

2) Ulusal

Enginoğlu, S. ve Aydın, T. (2016). Esnek ayırma aksiyomları. *Trakya Üniversiteler Birliği Lisansüstü Öğrenci Kongresi*, Çanakkale, Türkiye, 29-30 Nisan, s.37-37.

Enginoğlu, S., Çağman, N., Karataş, S. ve Aydın, T. (2015). Esnek topoloji üzerine bir değerlendirme. *10. Ankara Matematik Günleri*, Ankara, Türkiye, 11-12 Haziran, s.32-32.

**c) Katıldığı Projeler**

Esnek Karar Verme Metotlarının Sezgisel Bulanık Parametreli Sezgisel Bulanık Esnek Matrisler Uzayına Yapılandırılması, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi, FHD-2020-3466, Araştırmacı, 2020-Devam ediyor.

Sezgisel Bulanık Parametreli Sezgisel Bulanık Esnek Matrislerin Makine Öğrenimine Uygulamaları, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi, FHD-2020-3465, Araştırmacı, 2020-Devam ediyor.

Esnek Yarı-Ayırma Aksiyomlarının Esnek Eleman Kavramı Yoluyla Aydınlatılması, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi, FHD-2020-3424, Araştırmacı, 2020-Devam ediyor.

2013-2019 Yılları Arasında Ortaya Atılan Esnek Karar Verme Metotlarının Bulanık Parametreli Bulanık Esnek Matrisler Uzayına Yapılandırılması, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi, FBA-2020-3259, Araştırmacı, 2020-Devam ediyor.

Esnek Topoloji Üzerine, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi, FYL-2015-646, Araştırmacı, 2015-2016.

**d) Hakemlikler**

1) SCI, SCI-Expanded veya ESCI kapsamındaki dergilerde

Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, Ağustos 2020.

Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, Ekim 2019.

Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, Haziran 2019.

Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, Mayıs 2019.

2) Diğer uluslararası hakemli dergilerde

Journal of New Results in Science, Eylül 2020.

**e) Editörlük**

1) Diğer uluslararası hakemli dergilerde

Journal of New Theory, Mizanpaj Editörü, 2020-Devam ediyor.

## İLETİŞİM


| | | |
|---|---|---|
| E-posta Adresi | : | aydinttugce@gmail.com |
| ORCID | : | 0000-0002-8134-1004 |